Voyage au pays des nombres

Annecy
27 mars 2013

Jean-Claude DUPERRET

Première balade
« A la conquête du nombre entier naturel »

« Dieu a créé les nombres entiers, les autres sont l'œuvre des hommes »

Kronecker

A l’origine du nombre

La correspondance
« terme à terme »

Nuzi, vieille ville de Mésopotamie

Petite bourse d'argile creuse

Inscription : « Objets concernant des moutons et des chèvres »

21 brebis qui ont déjà eu des petits

6 agneaux femelles

8 béliers adultes

4 agneaux mâles

6 chèvres qui on déjà eu des petits

1 bouc

2 chevrettes

A l'intérieur de la bourse

48 billes en terre crue

Faire des entailles (1)

Le repère est la forme la plus ancienne du sens du nombre que l'on connaisse. Le plus vieux témoignage de cette façon de compter se trouve sur l'os du péroné d'un babouin, datant de 35 000 ans avant JC, découvert dans les montagnes de Ngwane en Afrique, qui fait apparaître 29 entailles

Faire des entailles (1)

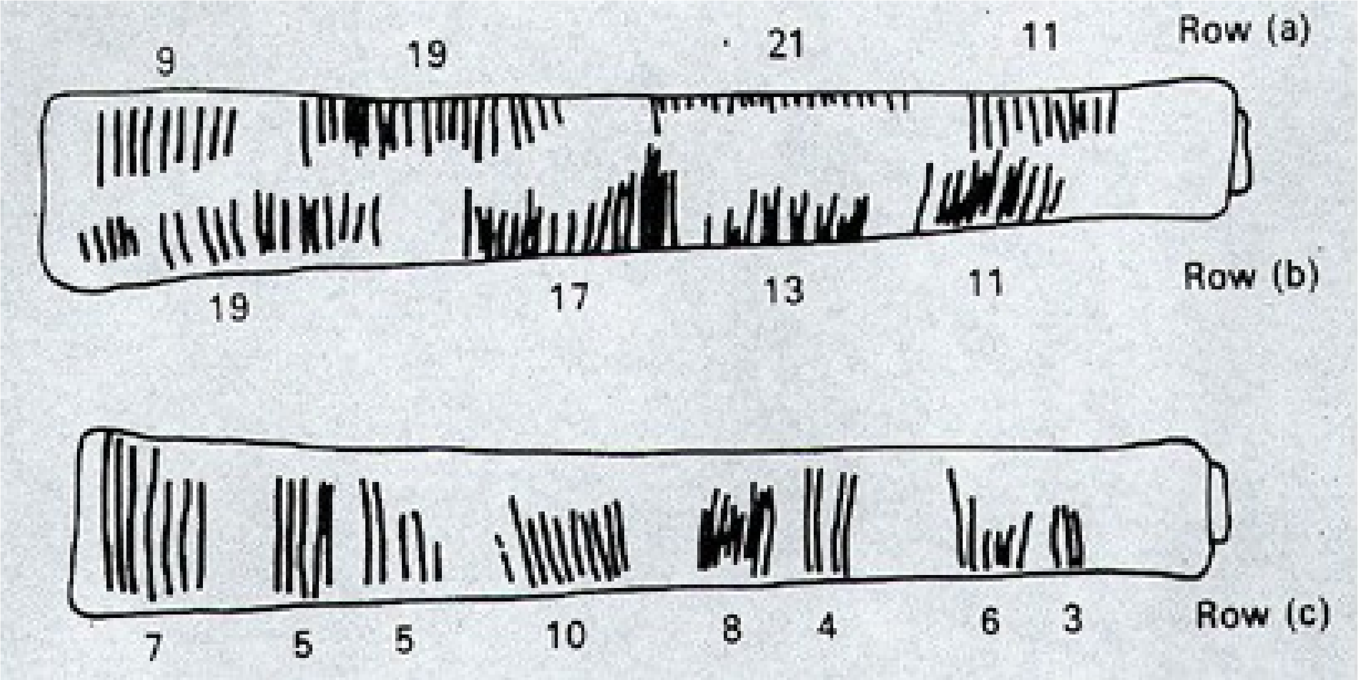
Dans « L’Afrique compte ! Nombres, formes et démarches dans la culture africaine.», Claudia Zaslavsky raconte que certaines femmes africaines font de temps en temps une encoche dans le manche de leur cuillère en bois. Marquent-elles des jours ? Jouent-elles avec des nombres ? Nullement : elles font une marque chaque fois qu’elles reçoivent un coup de leur mari ; et dès que le manche de la cuillère est rempli, elles demandent le divorce.

Faire des entailles (2)

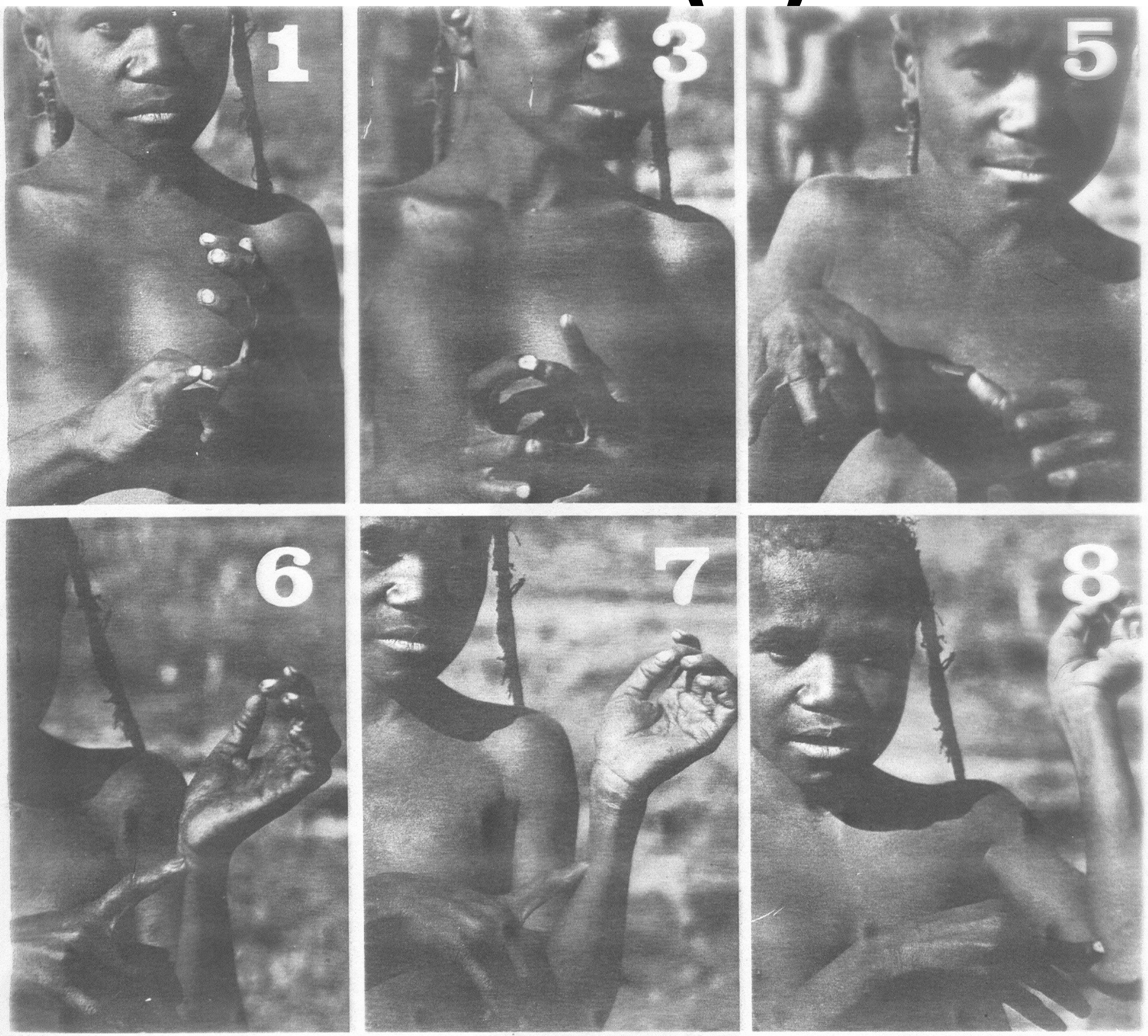
L'os d'Ishango

(Age approximatif : 20 000 ans ; lieu de la découverte : région du lac Edward, Afrique équatorial)

Faire des entailles (2)

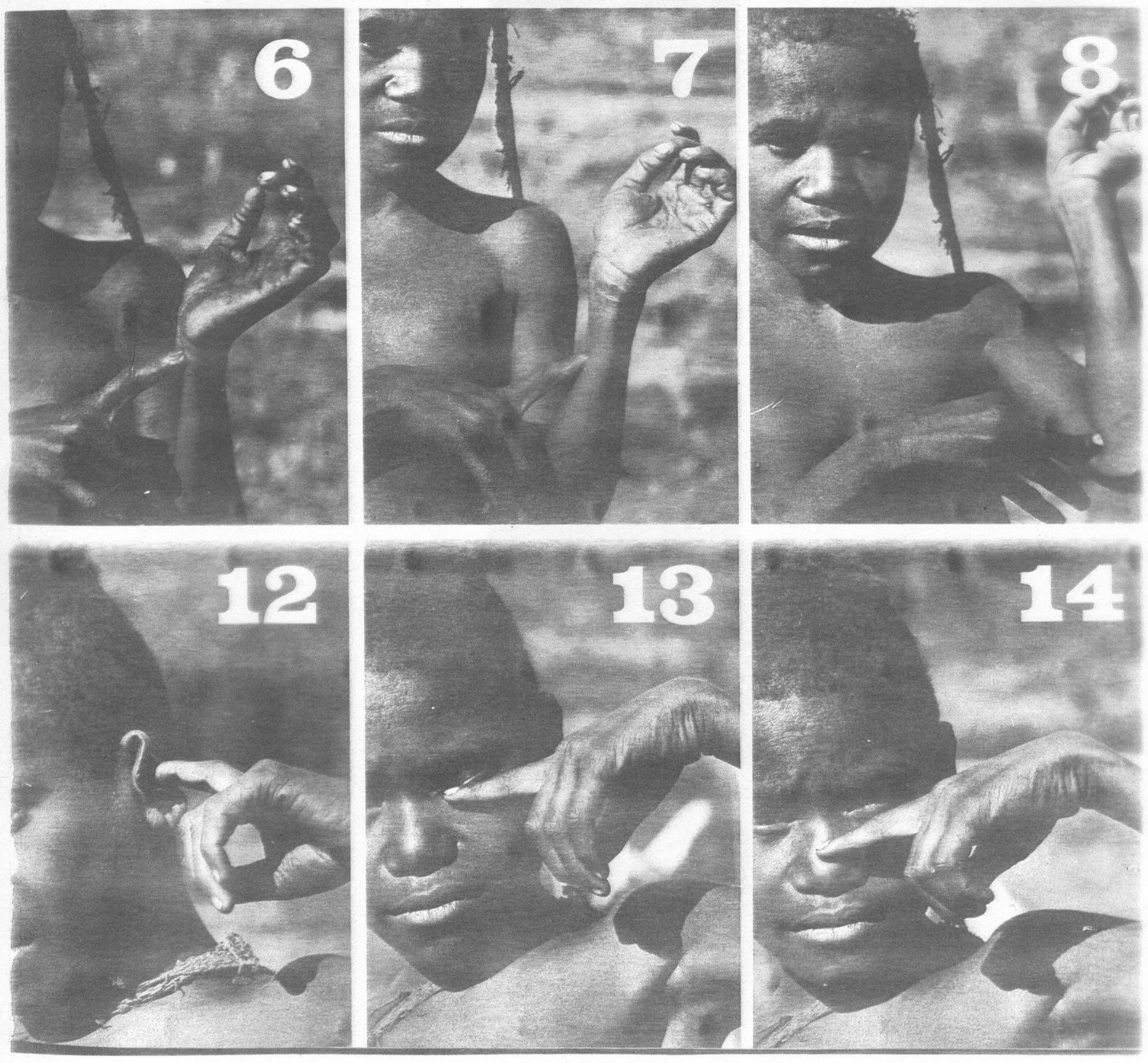


Utiliser les parties du corps (1)



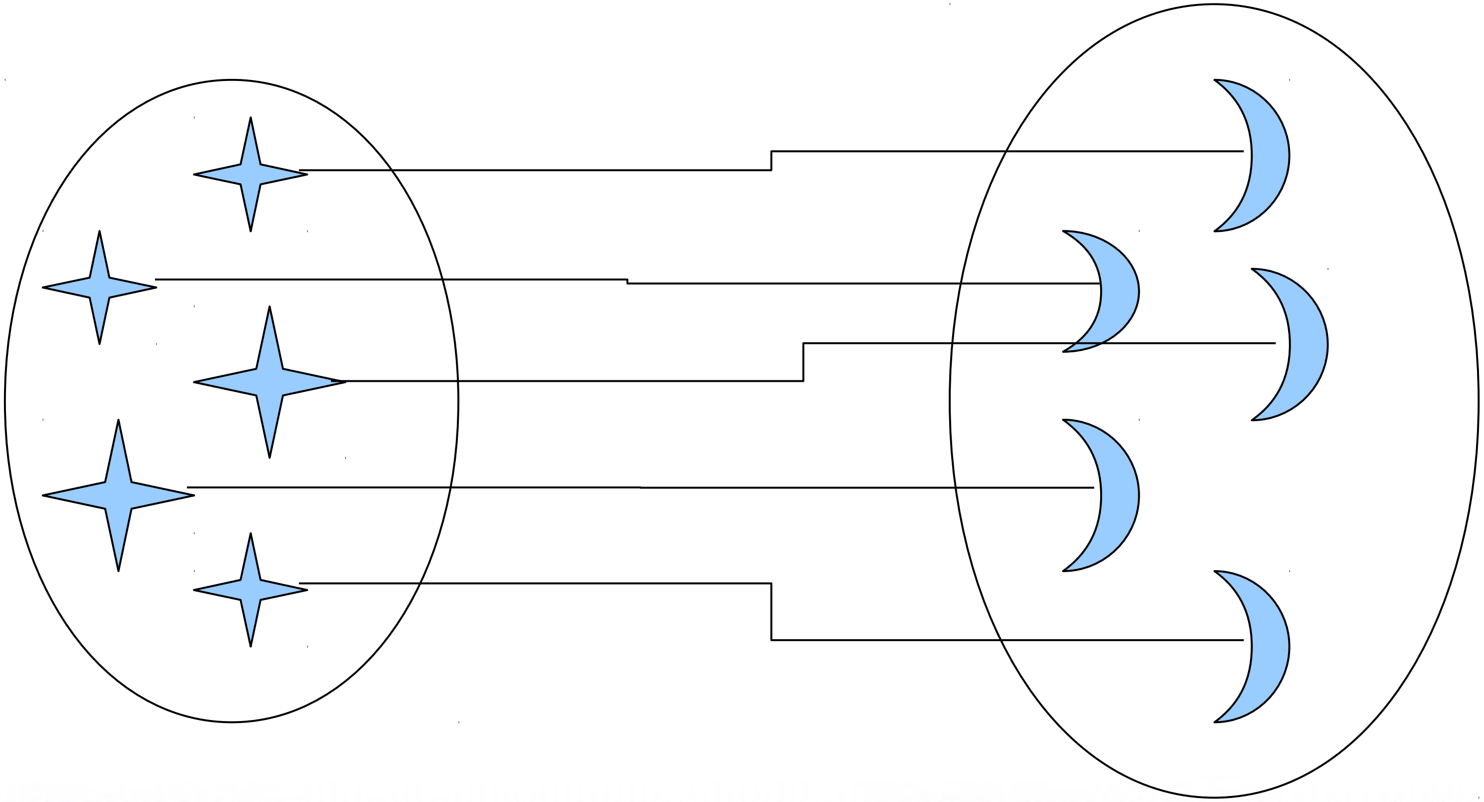
Indigène d'une tribu de Nouvelle Guinée

Utiliser les parties du corps (2)



Le 3 est loin devant

Correspondance biunivoque



Le nombre entier naturel

La construction du concept de nombre entier naturel passe par la capacité à effectuer une mise en correspondance biunivoque entre la collection des objets à compter et une collection type.

Nombre : concept fondamental des mathématiques qui permet de dénombrer, d'ordonner des collections d'objets ou de mesurer des grandeurs.

Représenter les nombres entiers naturels

Systèmes de numération

Jetons de comptabilité
(Girsou, -3500 -2900, musée du Louvre)

(Suse III, 3100 – 2850 av.J.C., musée du Louvre)

Représenter les nombres entiers naturels

Les chiffres et les lettres ont une longue histoire commune. Elle a commencé dès que les hommes eurent l'idée de l'écriture. Ils inventèrent des signes pour écrire les mots et les nombres.

Une unité : un signe

L'idée du groupement

Les groupes de groupes

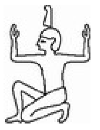
Concevoir une multiplicité comme une nouvelle unité

Numérations écrites (1)

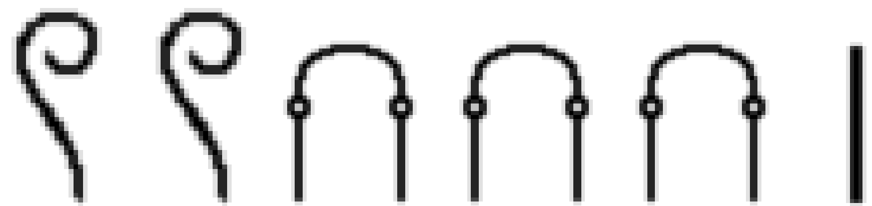
La numération égyptienne

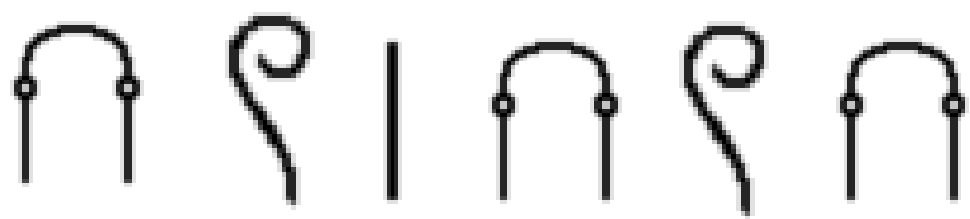
La princesse Nefertiabet devant son repas (règne de Kheops, 2590 – 2565 av.J.C., Louvre)

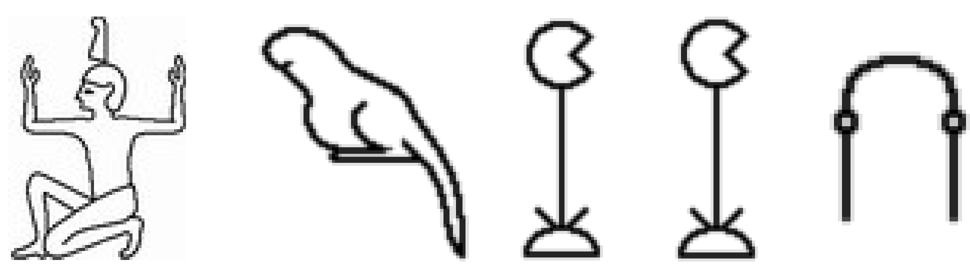
Numération égyptienne

un	1	bâton	
dix	10	anse	
cent	100	spirale	
mille	1 000	fleur de lotus	
dix mille	10 000	index	
cent mille	100 000	têtard	
un million	1 000 000	dieu	

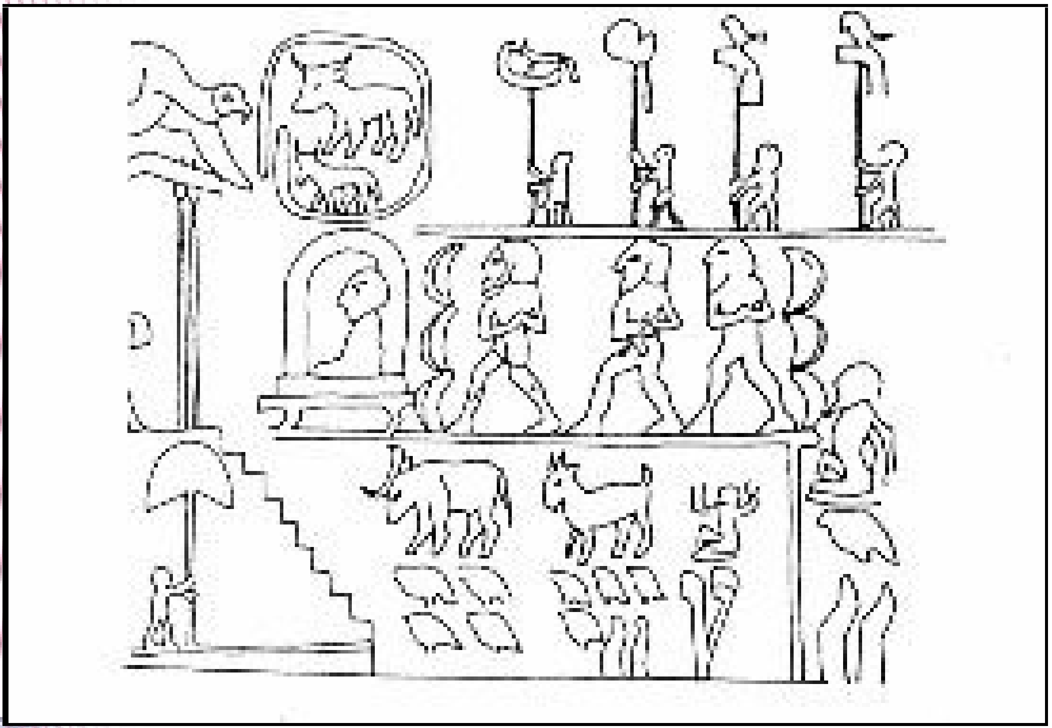
Numération égyptienne

231 

231 

1 102 010 

Massue du roi Narmer Menes (début du IIIe millénaire)



◄ Sur cet artefact on peut lire l'incroyable butin d'une grande victoire :

400 000 boeufs,

1 422 000 chèvres et

120 000 prisonniers.

Représenter les nombres entiers naturels

Quelques civilisations sont allées plus loin :

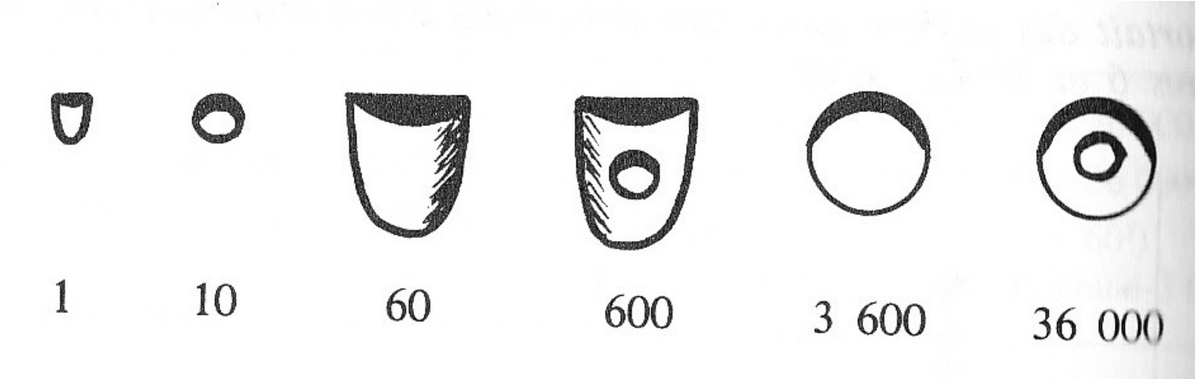
L’idée de position

L’idée du zéro

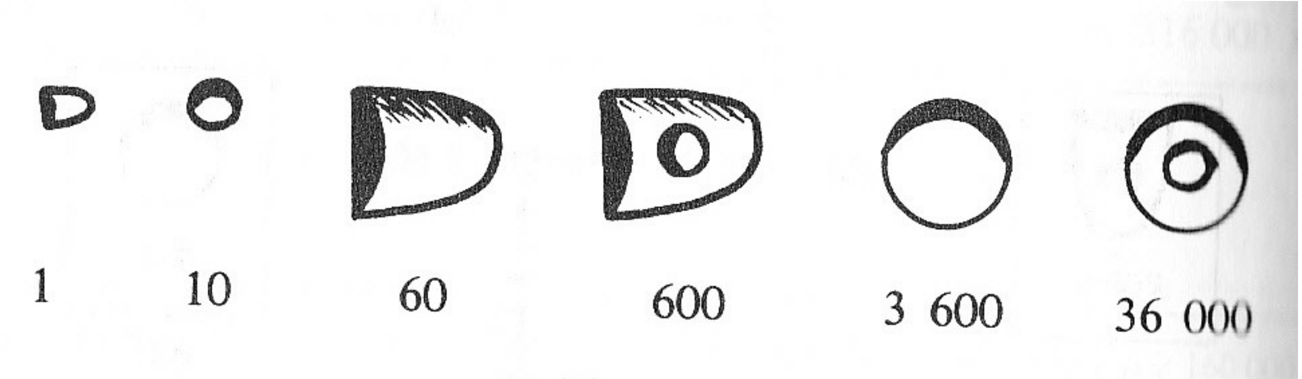
Numérations écrites (2)

La numération babylonienne

Chiffres archaïques sumériens

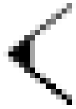
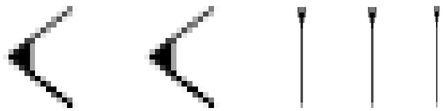


(Georges Ifrah)



Numération babylonienne

Chez les Sumériens

1	clou	
10	chevron	
23		

Numération babylonienne

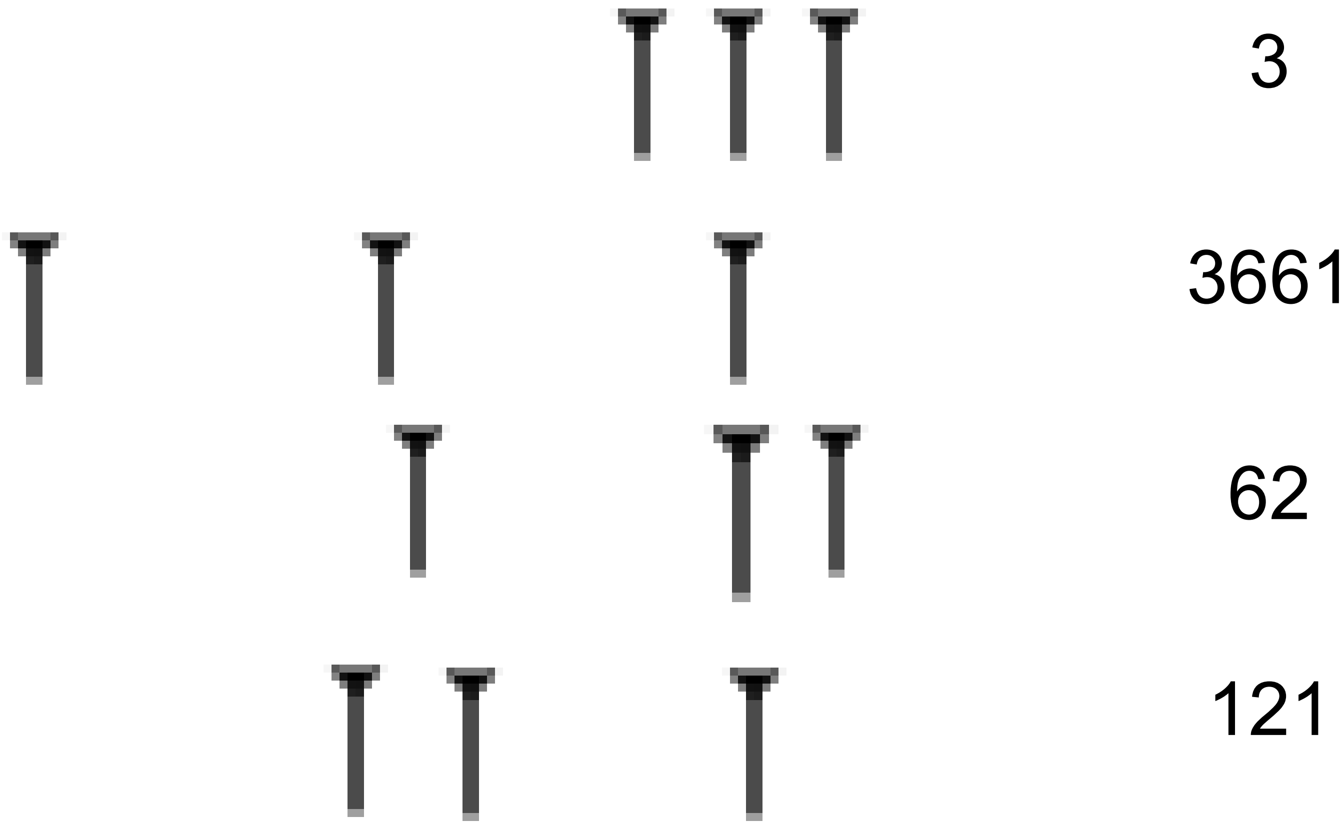
C’est une numération de position en base 60

1

60

3600

Numération babylonienne



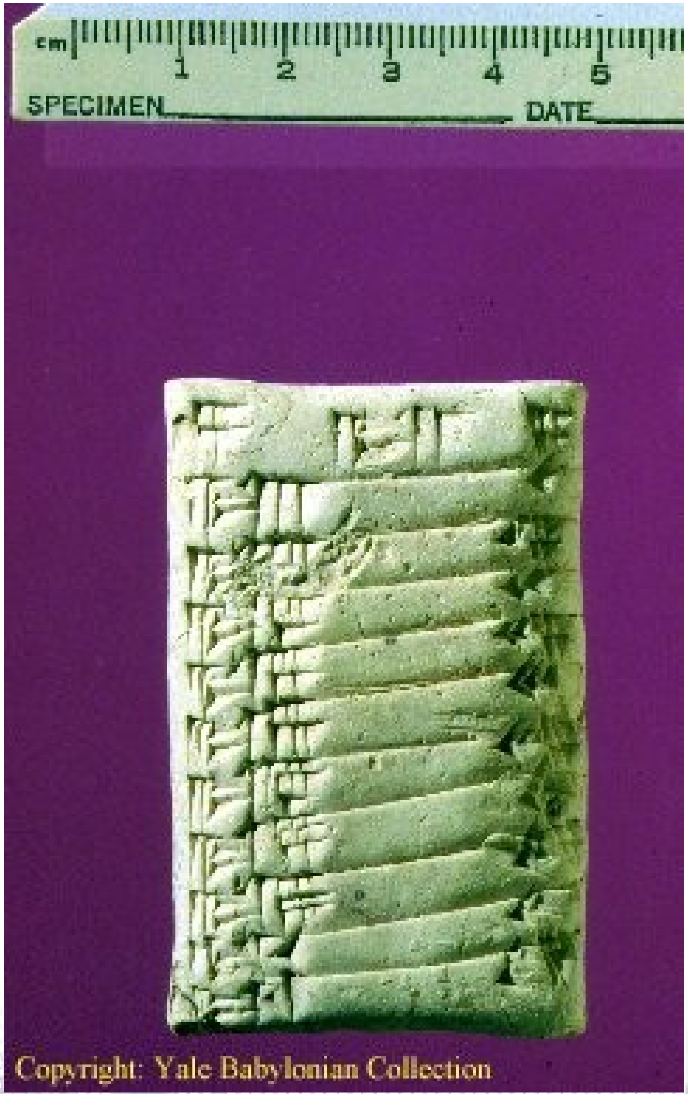
Numération Babylonienne

35 s'écr

73 s'écr

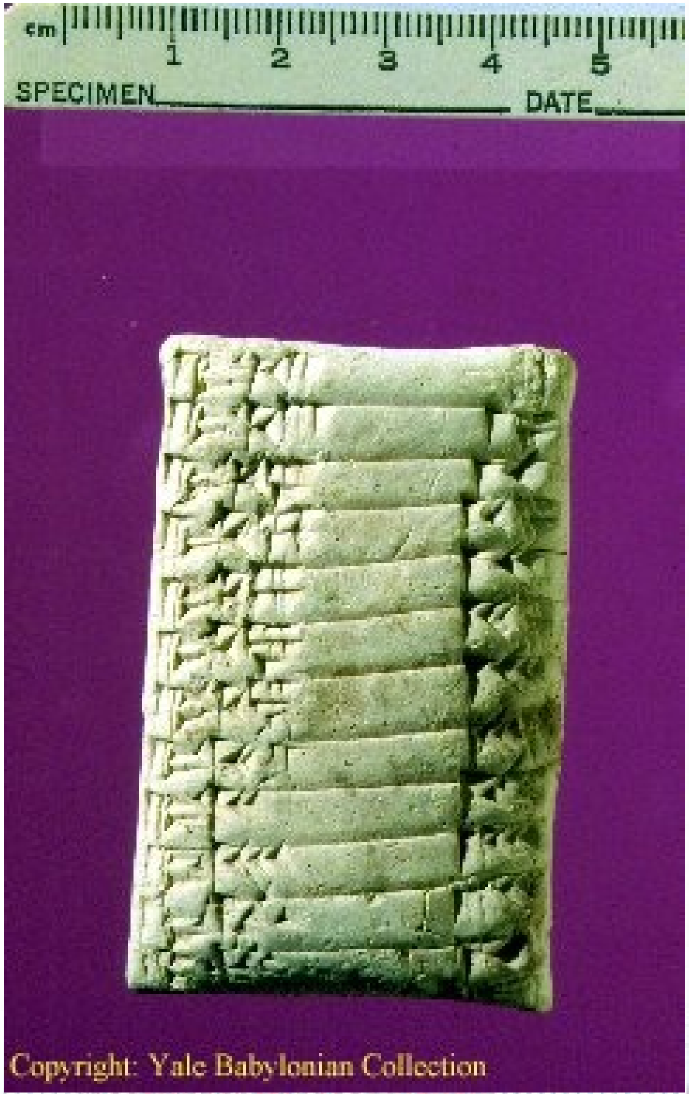
3786 s'é

La tablette mystérieuse
(YBC 7344)

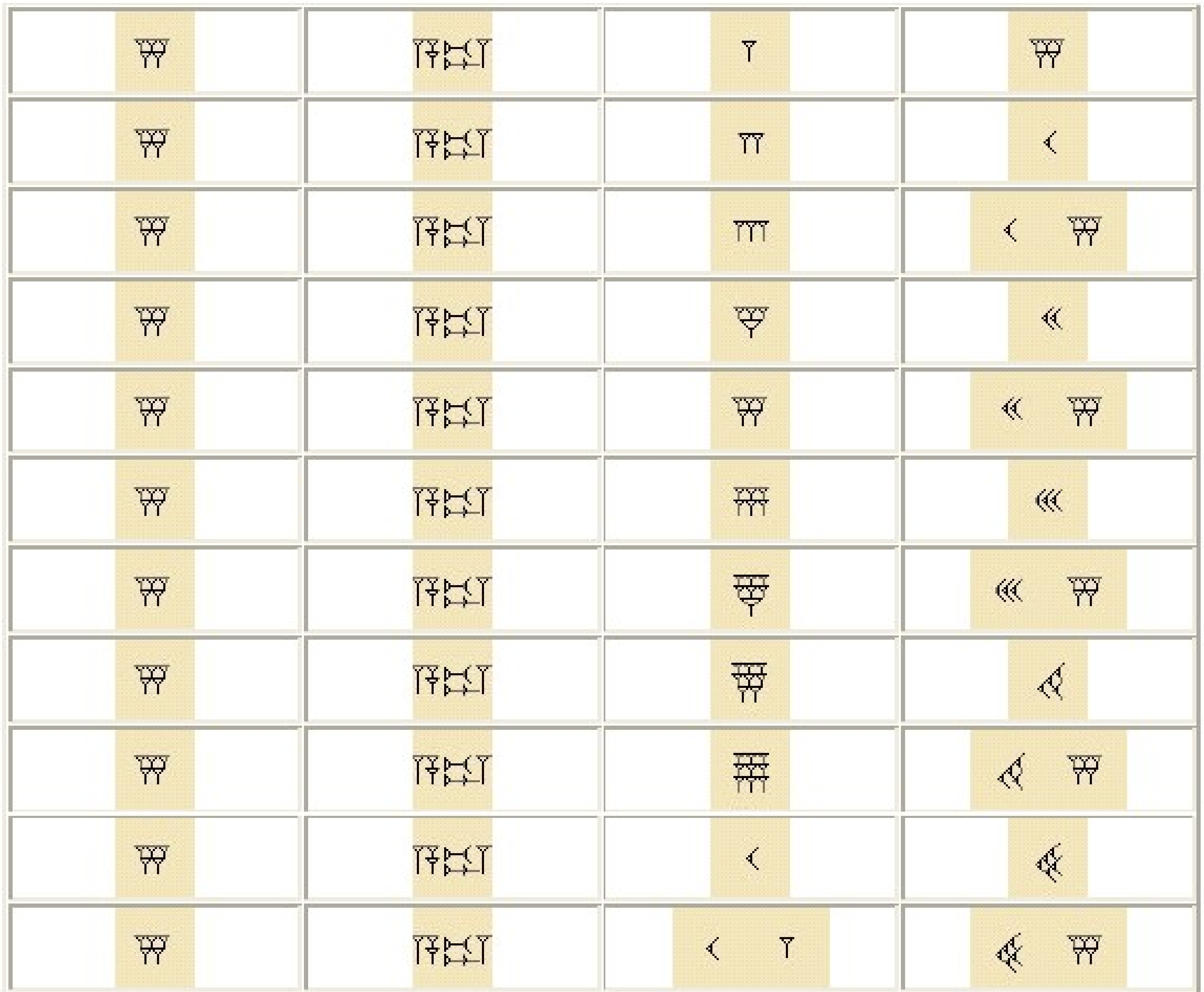


◄ Recto

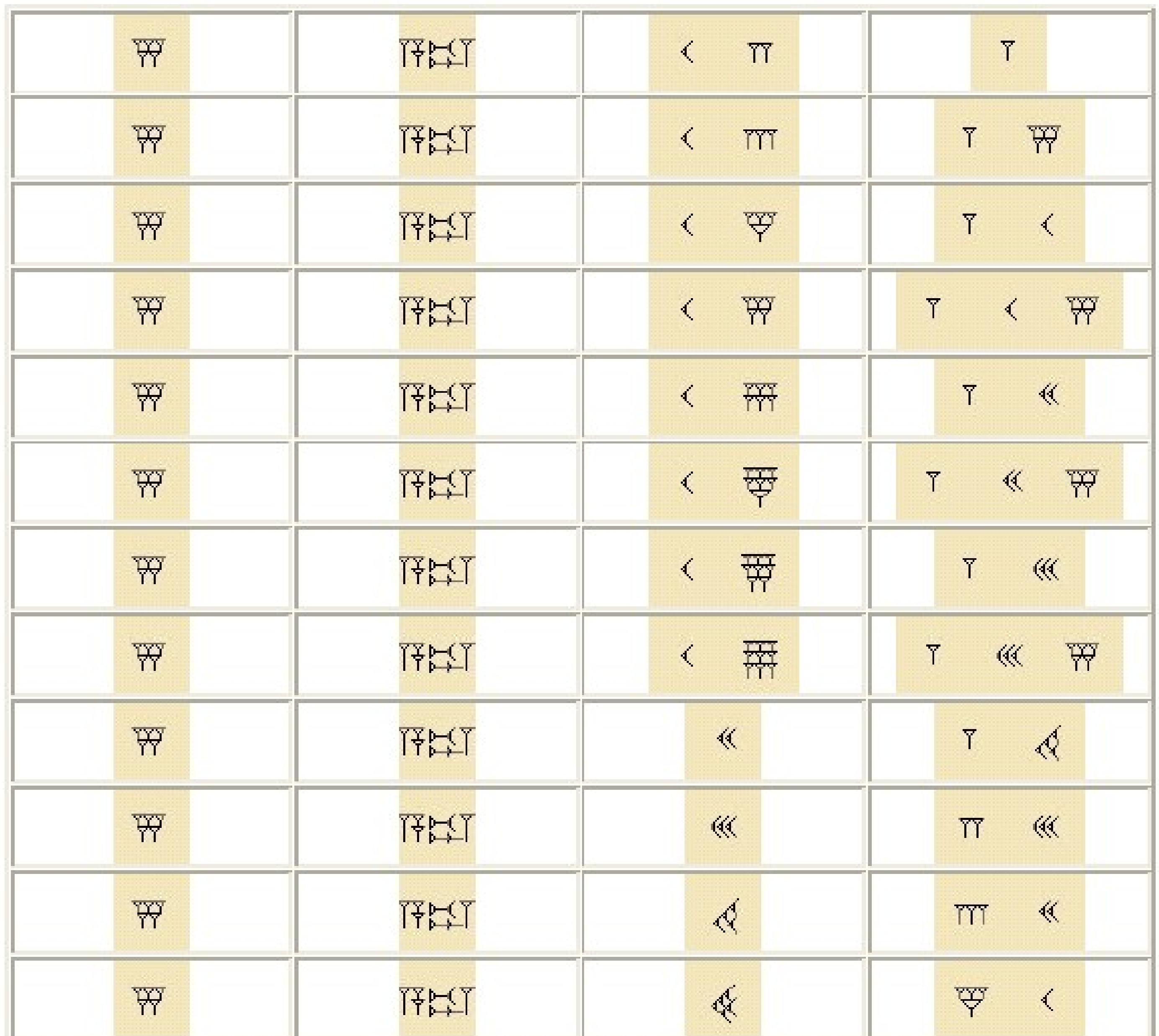
Verso ►



La tablette mystérieuse (YBC 7344 recto)



La tablette mystérieuse (YBC 7344 verso)



Numération babylonienne

Le seul défaut du système est l'absence de zéro (il sera corrigé plus tard à l'époque des Séleucides)

Ainsi l'écriture cunéïforme

peut représenter 90 ou 3630 ...

Numération babylonienne

Puis vint le zéro

3610 :

marque l'absence

0 marque l'absence comme une présence

0 va devenir la quantité nulle

Le zéro

Les mathématiciens indiens (Brahmagupta, début 7e siècle) sont les premiers à utiliser le zéro en tant que nombre.
Il donne des règles de calcul équivalentes à :

$$a+0 = a \; ; \; a \times 0 = 0$$

Il utilise également des nombres négatifs.

En indien zéro se dit sunya (vide ou nul)
Les arabes l'ont traduit par sifr (vide) d'où provient le mot chiffre.

Numérations écrites (3)

Notre système de numération

Les caractéristiques de notre système de numération

C' est un système à base dix (décimal)

Qui utilise 10 chiffres

C'est un système positionnel

Qui utilise un symbole spécifique pour indiquer l'absence d'une unité

$$1515 = 1 \times 1000 + 5 \times 100 + 1 \times 10 + 5$$

$$307 = 3 \times 100 + 7$$

Quelques repères chronologiques

Invention du système en Inde (3^e – 5^e siècle)

Al Khwarismi,
« La manière de compter des Indiens à l'aide de neuf caractères » (début 9^e s)

Quelques repères chronologiques

Léonard de Pise, dit Fibonacci, écrit son « liber abaci » (1202)

« Les neufs chiffres indiens sont 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Avec ces neufs chiffres et avec le signe 0, qui est appelé sifr en arabe, n'importe quel nombre peut être écrit… »

Généralisation en Occident au 14ème siècle

Origine des chiffres

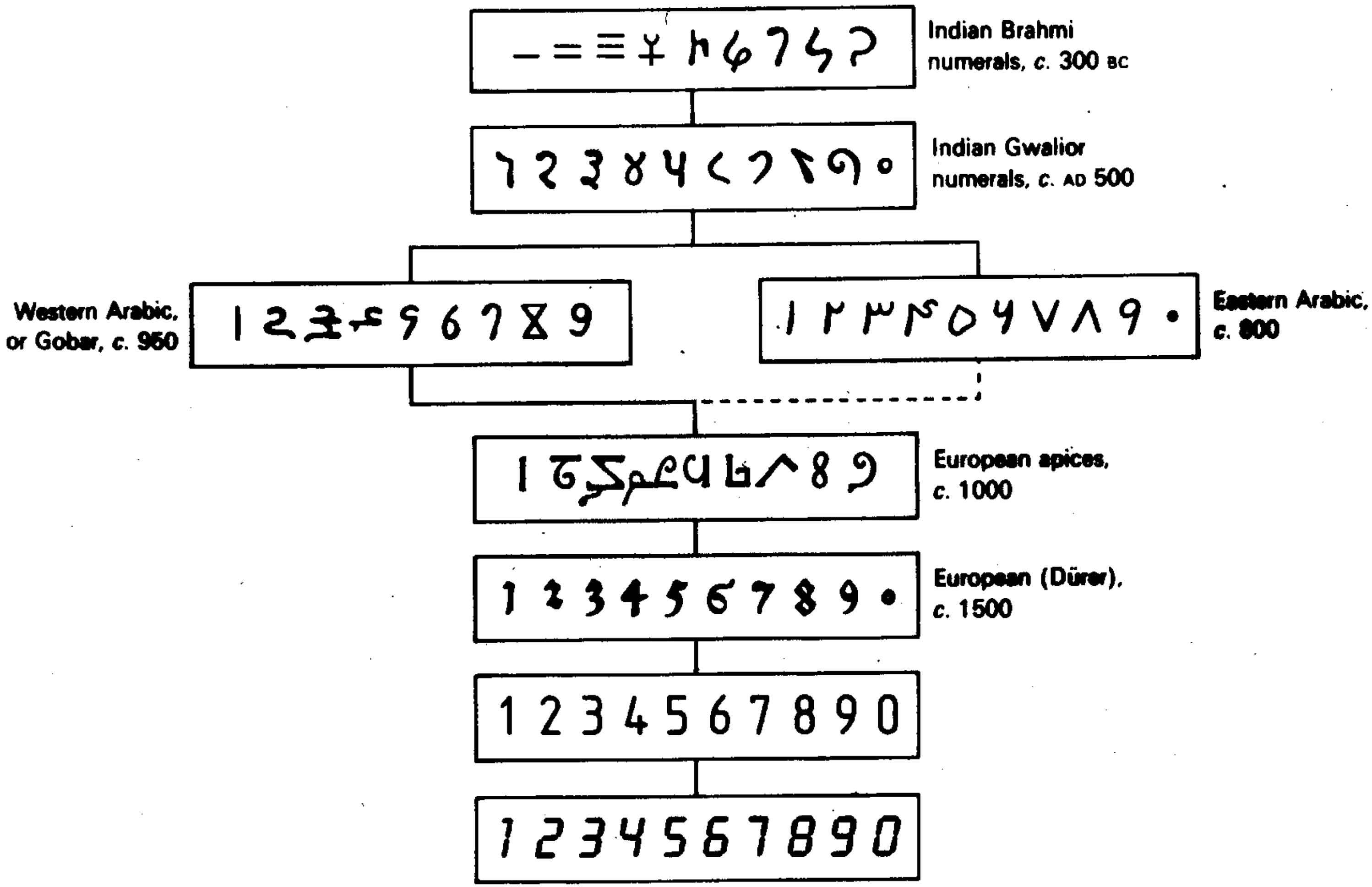


Figure 10.2 The evolution of present-day numerals (after Open University, 1976, p. 53).

Mathématiques et Histoire

C'est à travers les siècles et les civilisations que s'est peu à peu constitué un langage universel, fruit de toutes les pensées successives d'hommes de cultures très différentes.

« Ce phénomène insolite de découverte multiple de la même vérité mathématique, indépendamment du temps et du lieu, montre clairement la spécificité du génie créatif des mathématiques » (John D.Barrow)

« Comprendre » et « lire » les nombres

Double aspect :

Cardinal : mesure d'une collection finie

Ordinal : tout entier a un suivant

Vous avez dit naturel ?

0 est-il naturel ?

100 milliards est-il naturel ?

Lire les nombres :

97 + 115 = 212

est une écriture universelle,

mais sa « lecture » dépend de la langue

Connaissance « évoluée » des nombres

Elle met en jeu 3 composantes :

La représentation des quantités

La représentation verbale

La représentation symbolique (indo-arabe)

Les entiers naturels

Lieu privilégié pour une démarche d'investigation

La course à 20…ou plus

La course à 20

Ce jeu se joue à 2 joueurs

Le premier dit 1 ou 2, le second ajoute 1 ou 2, et ainsi de suite alternativement.

Le premier qui arrive à 20 a gagné.

Quelle stratégie adopter pour gagner ?

La course à 20…ou plus

La course à 20

Qui va gagner : celui qui dit en premier 17, donc 14, donc 11….donc 2

Pour gagner, il faut donc commencer en disant 2

La course à 20…ou plus

La course à 250

Même stratégie : 247,243, 240….ça devient un peu long !

Mais n’y aurait-il pas une « opération » qui permette d’économiser toutes ces soustractions itérées ?

La course à 20…ou plus

La course à 270

Où est le problème ?

Variante

On ajoute 1,2 ou 3

Une conjecture solide… jusqu'à…

Conjecture : $n^{17}+9$ et $(n+1)^{17}+9$ sont premiers entre eux

Cette conjecture est vérifiée jusqu'à $n < 10^{52}$

Mais vient le contre-exemple (Delahaye) :

n = 8 424 432 925 592 889 329 288 197 322 308 900 672 459 420 460 792 433

Conjecture de Golbach (1742)

4 = 2+2

6 = 3+3

8 = 5+3

Conjecture : tout nombre pair supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombre premiers

On n'a trouvé aucun contre-exemple à ce jour !

Pourquoi enseigner les mathématiques !

Une première réponse que j’avancerai est que l’apprentissage des mathématiques est une forme d’apprentissage de la démocratie, en mettant les élèves en “ activité mathématique ”.

Celle-ci commence en général par une recherche personnelle, défi entre le problème et nous, démarche intellectuelle intime qui développe et construit notre pensée.

Pourquoi enseigner les mathématiques !

Une seconde réponse est liée à la nature même de l'activité mathématique : résoudre des problèmes, c'est-à-dire se mettre dans une constante confrontation au non savoir. Et là se développent des comportements “ experts ”, avec la recherche de la meilleure stratégie, du modèle le plus pertinent, comportements tout à fait transférables à d'autres champs d'action que les mathématiques.

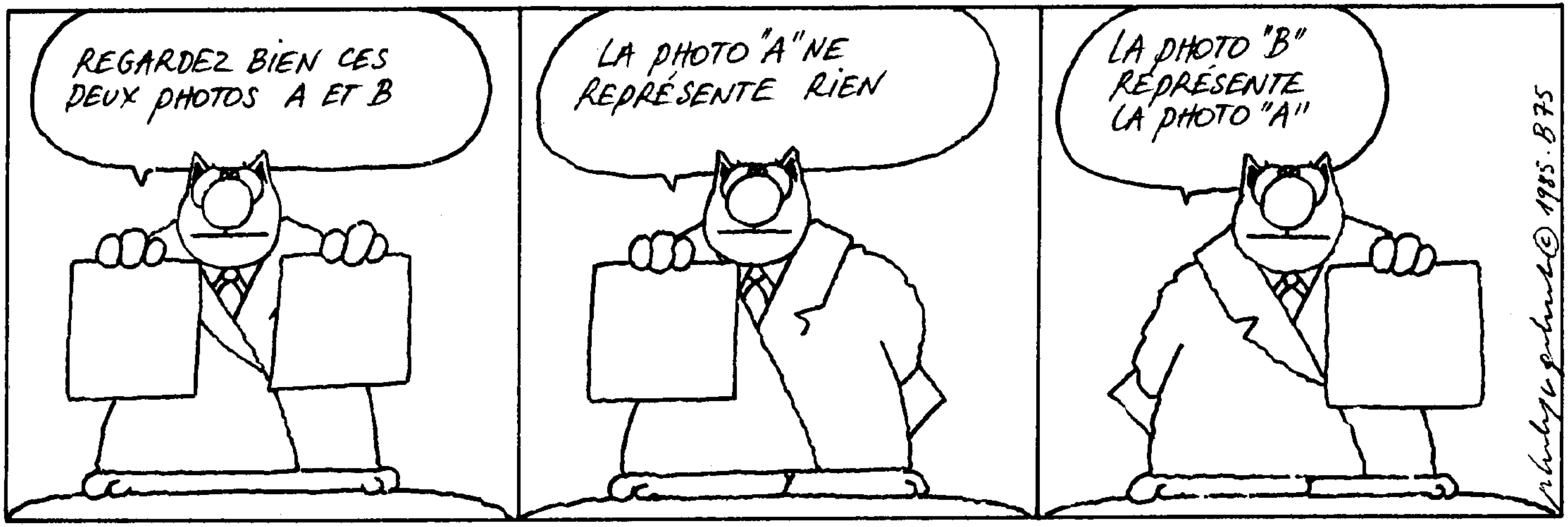
Pourquoi enseigner les mathématiques !

Et parmi tous ces comportements experts, l'un est vraiment une attitude spécifique des mathématiques que développe la résolution de problèmes :

apprendre à “ sécher ”

Définitions de l'ensemble vide

Construction de l'ensemble des naturels




"ILS ÉTAIENT SIX MARCHEURS QUI MARCHAIENT SUR LA ROUTE"
CET ADMIRABLE ALEXANDRIN COMPORTE AUTANT DE PIEDS QUE LES GENS DONT IL PARLE

Translation lexicale : la collection des collections

Deuxième balade

Du nombre au calcul

Abaque ou algorithme

Gravure ancienne
représentant Boèce
et Pythagore

Modélisation

et modèle

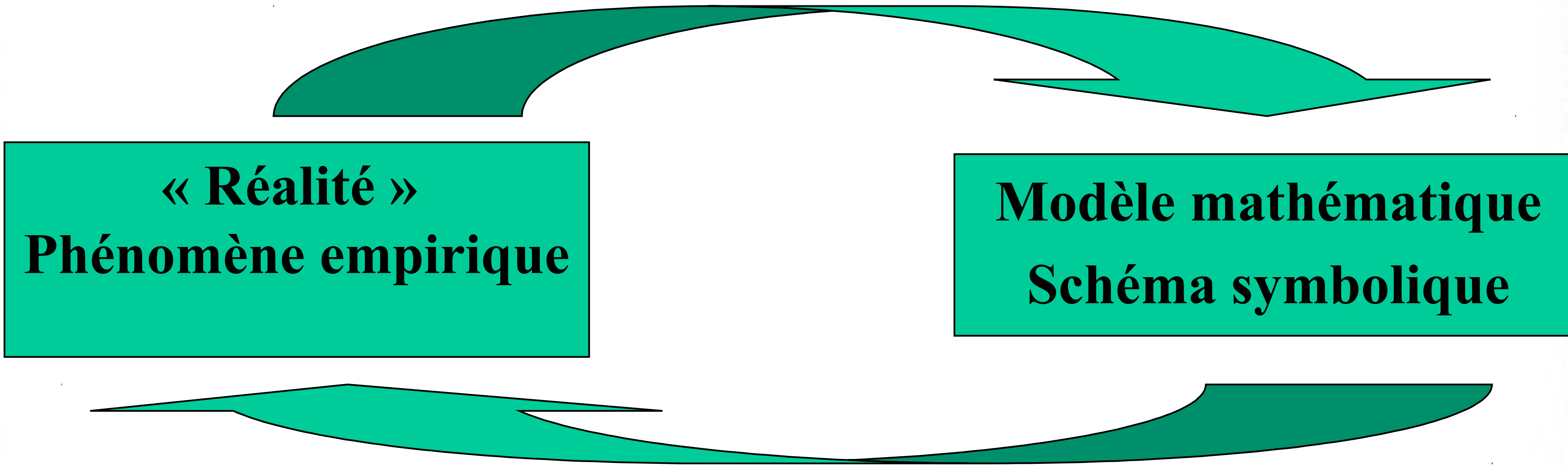
Modélisation

Représentation « fonctionnelle » des objets d'une certaine « réalité » par des objets « abstraits » ou « schématisés » dans un modèle où peut s'exercer un traitement théorique

Représentation « analogique » : les processus naturels sont imités dans des conditions qui favorisent l'observation et l'étude

Représentation « sélective » : un travail de modélisation nécessite de retenir certaines caractéristiques de la situation et d'en ignorer d'autres

« Modélisation » et « modèle »



- Du réel vers le modèle : modèles descriptifs (« transformer » et « interpréter » des « informations ») ; fonction heuristique
- Du modèle vers le réel : modèles prédictifs (« anticiper » une « action ») ; fonction justificative

Le calcul, pourquoi ?

Le calcul va naître de la nécessité de réaliser dans un « modèle symbolique » les actions menées dans le « monde réel ».

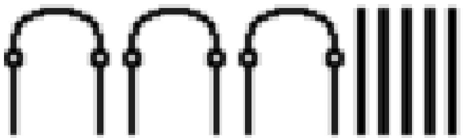
Par exemple, le regroupement de collections de mêmes objets va se traduire par l’addition dans le monde mathématique.

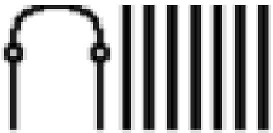
Le calcul, comment ?

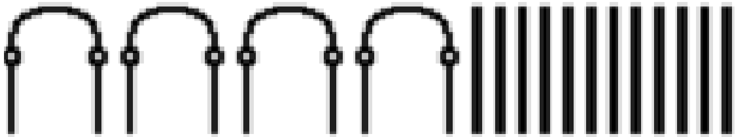
Les algorithmes de calcul pour « représenter » ces actions dans le monde mathématique vont évidemment être fortement dépendants du système de représentation des nombres.

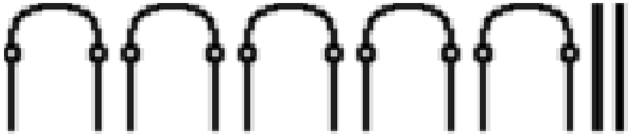
Et l’analogie avec les gestes de la réalité sera d’autant moins évidente que le système sera évolué, comme par exemple notre système indo-arabe.

L'addition

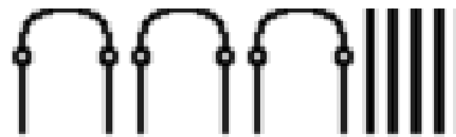
35 

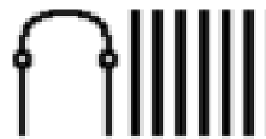
17 

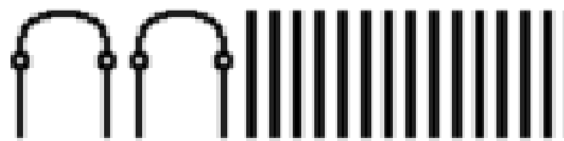
35 +17 

52 

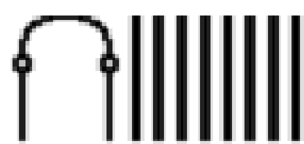
La soustraction

35 

17 

35 

35 - 17

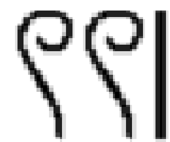
18 

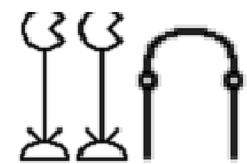
Addition, soustraction…et déplacements

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

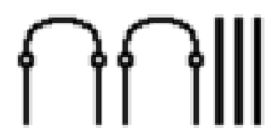
La multiplication

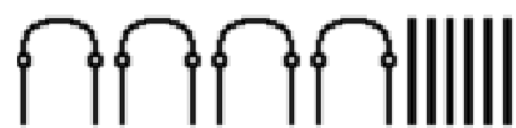
La multiplication par 10

201 

2010 

La multiplication par 2

23 

46 

La multiplication

Méthode égyptienne donnée par le scribe Ahmès dans le papyrus de Rhind (1650 ans avant JC environ)

Exemple : 24 x 37

1	37 = 1 x 37
2	74 = 2 x 37
4	148 = 4 x 37
8	296 = 8 x 37
16	592 = 16 x 37

Pour obtenir le résultat final, il suffit d'ajouter (8x37) et (16x37)

24	888 = 296 + 592

Le papyrus de Rhind

Le papyrus de Rhind a été écrit vers 1650 ans avant JC (période intermédiaire 2) par le scribe Ahmès, qui affirme l'avoir copié sur un document plus vieux de 200 ans.

Il se présente sous la forme d'un rouleau de 6 mètres sur 30 cm de large contenant 87 problèmes.

Dans son introduction, Ahmès le présente ainsi :
« exemple de calcul afin de sonder les choses, et connaître tout ce qui est obscur…ainsi que tous les secrets. »

L’école sert !

Etude menée par Schliemann en 1998 auprès « d’enfants de la rue »

Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l’un ?

Réussite : 75 %

Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l’un ?

Réussite : 0 %

La division

La méthode égyptienne de division se trouve aussi dans le papyrus de Rhind ; elle utilise une suite de doublements et de dédoublements.

Exemple : diviser 38 par 8

1	8 = 1 x 8
2	16 = 2 x 8
4	32 = 4 x 8
1/2	4 = 1/2 x 8
1/4	2= 1/4 x 8
4 +1/2 +1/4	38 = 32 + 4+ 2

Le résultat est donc 4 +1/2 +1/4

La division nécessite la connaissance des **fractions**

La… ou plutôt les divisions

On fait des guirlandes de 5 mètres dans une « ficelle » de 32 mètres. Combien de rubans peut-on faire ?
On fait 5 guirlandes de même longueur dans une « ficelle » de 32 mètres. Quelle est la longueur d'un ruban ?

Le résultat du premier problème est qu'on peut faire 6 guirlande de 5 m, et il restera 2 m

$$32 = 5x6 + 2$$

C'est le résultat de la **division euclidienne** de 32 par 5

Le résultat du 2nd problème est qu'on peut faire 5 guirlandes de 6,4 m

C'est le résultat de la **division « décimale »** de 32 par 5

$$32 : 5 = 6,4$$

Un problème fondamental de la résolution de problèmes

Le rapport à la réalité

Nos sens nous trompent…surtout le bon sens !

Un problème de Tartaglia

Un paysan achète un cheval 400F, le revend 500F, rachète le même cheval 600F et le revend 700F.

A-t-il gagné de l'argent ? Perdu de l'argent ? Combien ?

Un problème de Tartaglia

Sil avait 1000 francs au départ, il a successivement :

600, 1100, 500, 1200

Plus mathématique ???

$- 400 + 500 – 600 + 700 = + 200$

Certificat d’études primaires, Ardennes, 1900.

En 5 jours, un fumeur consomme un demi-hectolitre de tabac valant 12 fr le kilogramme.
On demande premièrement ce que cette habitude de fumer coûte chaque année à celui qui l’a contractée;

Deuxièmement, combien de litres de vin il pourrait acheter avec l’argent ainsi employé, si un hectolitre de vin coûte 40 fr.

Pourquoi enseigner les mathématiques !

Citons Guy Brousseau pour qui une des finalités premières de l’enseignement des mathématiques est le développement de la personnalité rationnelle de l’élève et l’apprentissage des comportements sociaux relatifs à l’établissement de la vérité.

Pourquoi enseigner les mathématiques !

Citons Régine Douady pour qui les mathématiques sont un lieu où il est possible de mettre les élèves en situation d’avoir à faire des prévisions, de les tester, et d’obtenir des réponses pour lesquelles finalement les démonstrations apportent la certitude, et qu’ainsi leur apprentissage contribue :

- à la compréhension mutuelle
- à la communication sociale
- à la prise de responsabilité

Pourquoi enseigner les mathématiques !

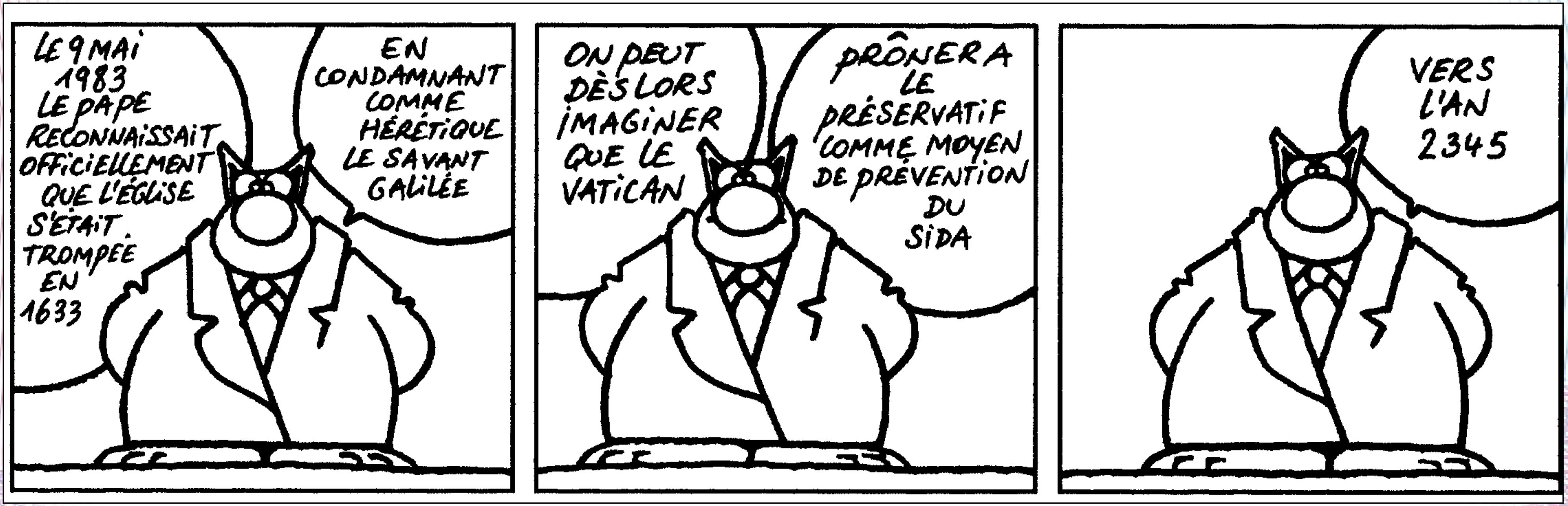
Gérard Kuntz décline les trois priorités que l'enseignement des mathématiques doit proposer aux jeunes qui lui sont confiés :

- ➢ formation de la personne : comprendre le monde pour mieux se comprendre.
- ➢ formation du futur acteur économique : préparer l'entrée dans le monde du travail.
- ➢ formation du futur citoyen.


LE VERRE HEXAGONAL A CET AVANTAGE SUR LE VERRE CARRÉ
QUIL POSSÈDE DEUX COINS DE PLUS OÙ METTRE DU LIQUIDE

Le Chat et la (le ?) champagne

Les sujets tabous
(avec mathématique cachée)



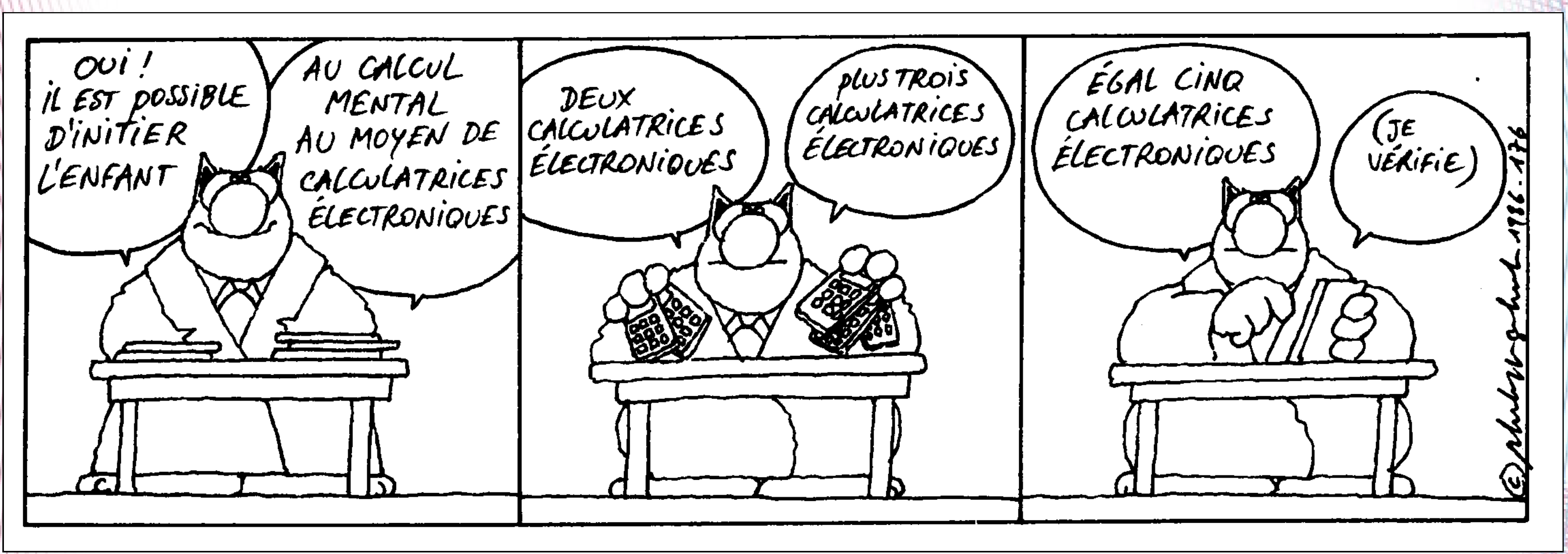
… et développer le calcul mental : l'addition ...

Francisco Ferrer

Le cas français …

Francisco Ferrer

... même en utilisant les calculettes



Francisco Ferrer

Propriétés de l'addition

Francisco Ferrer

Troisième balade

L'insuffisance des nombres entiers et l'arrivée de nouveaux nombres

Les nombres rationnels (fractions)
Les nombres décimaux

Fractions égyptiennes

Les problèmes de partage en parts
égales sont sans doute
à l'origine des fractions égyptiennes

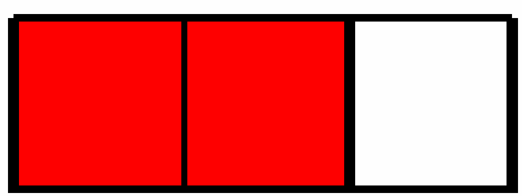
Fractions égyptiennes

Le problème 6 du papyrus Rhind :
Partager 9 pains entre 10 hommes.
Réponse :
Tu devras effectuer 10 fois
2/3 1/5 1/30

Les seules fractions utilisées par les Égyptiens, à l'exception de 2/3, sont des fractions de numérateur 1

La fraction $\frac{2}{3}$

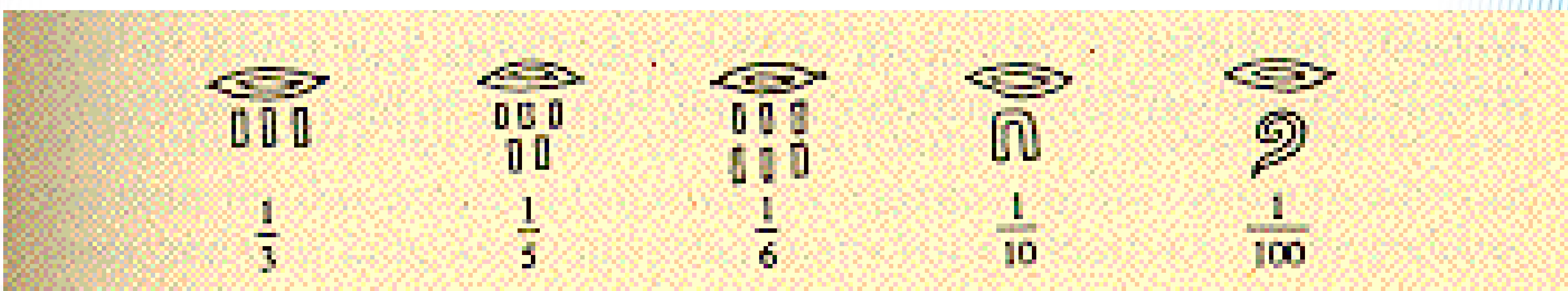
$\frac{2}{3}$

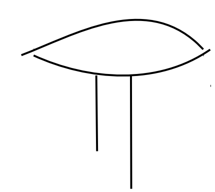


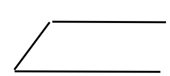
$\frac{2}{3}$

Fractions égyptiennes

Pour noter les fractions on utilise le signe mot en forme de bouche signifiant « la part »



2/3 s'écrit avec un signe spécial : 

Et 1/2 : 

Fractions babyloniennes

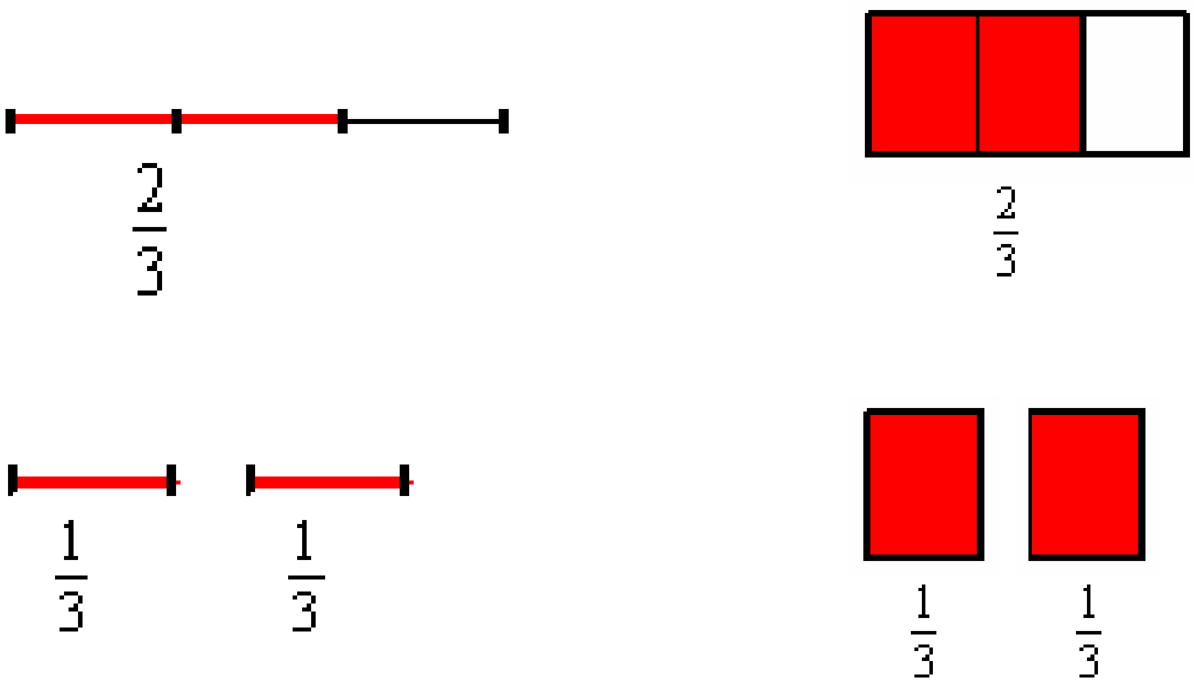
Dans les mathématiques babyloniennes, les fractions ont pour signification celle d’inverse

Fractions babyloniennes

Les sumériens concevaient la fraction 1/*n* comme « l'inverse de *n* » et désignaient ce type de fraction par le terme général d' « inverse ».

S'il s'agissait de la fraction *m*/*n*, les mathématiciens babyloniens l'exprimaient au moyen de la formule « *m* fois l'inverse de *n* ».

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$



Fractions babyloniennes

Dans un problème de la tablette AO 8862, on peut lire les résultats suivants :

1 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 : 36
2 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 : 1;12
3 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 : 1;48
4 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 : 2;24
5 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 : 3

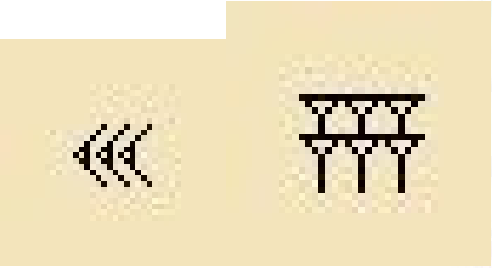
Fractions babylonniennes

L'inverse de 15 :

1/15 = 4/60

1 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 :

(1/15) x 9 = 9/15 = 36/60



4 fois l'inverse de 15 multiplié par 9 :

(4/15) x 9 = 36/1

Fractions babyloniennes

Le système de numération sexagésimal positionnel des babyloniens leur permettait d'écrire et d'utiliser dans les calculs des fractions dont le dénominateur est une puissance de 60

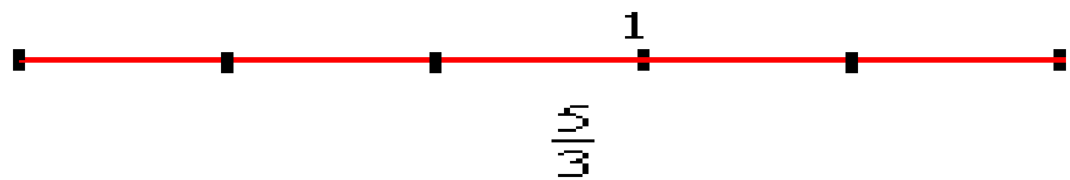
Exemple : 2/5 s'écrivait
Car 2/5 = 24/60

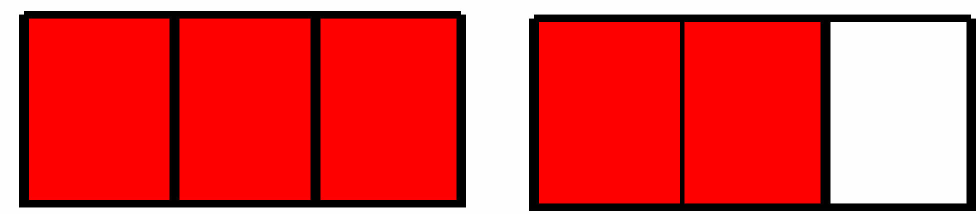
Fractions babyloniennes

L'absence d'un marqueur pour indiquer la position du chiffre des unités entraîne une ambiguïté dans la lecture du nombre

peut représenter 80 ou 4/3 ($1\frac{1}{3}$)

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$





$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

L’arrivée de nouveaux nombres

Nombre rationnel

Insuffisance (mathématique) des nombres entiers

La somme, la différence, le produit de nombres entiers sont des entiers.

Mais le quotient de deux nombres entiers n’est pas en général un nombre entier

Ex   18 : 3 = 6

Mais 18 : 5 = 3,6

Et comment représenter : 18 : 7 ?

Nombre rationnel

Le quotient d’un nombre entier par un nombre entier non nul s'appelle un nombre rationnel.

Rappelons que le quotient de l'entier a par l'entier b (non nul) est le nombre x qui vérifie

$$b \times x = a$$

On représente ce quotient par la fraction :

$$\frac{a}{b}$$

Tout nombre entier est un nombre rationnel

Forme irréductible d'un nombre rationnel

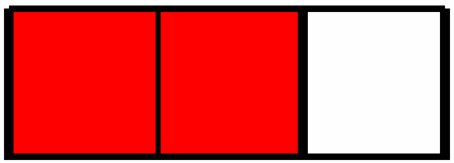
Un même nombre rationnel possède une infinité d'écritures fractionnaires différentes.

Exemple : $\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{21}{9} = \frac{28}{12} = ...$

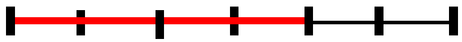
Parmi celles-ci une seule est telle que le numérateur et le dénominateur soient des nombres entiers premiers entre eux.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

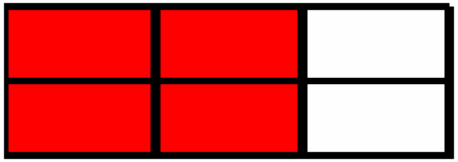
$\frac{2}{3}$



$\frac{2}{3}$



$\frac{4}{6}$



$\frac{4}{6}$

Opérations sur les nombres rationnels

La somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

L’arrivée des nombres décimaux

L'apparition des nombres décimaux est liée au développement d'algorithmes d'opérations

Origine des nombres décimaux

Les nombres décimaux apparaissent pour la première fois dans l'Arithmétique d'Al Uqlidisi (vers 952). Par exemple pour partager successivement 19 en deux, il écrit :

19

9'5

4'75

2'375

1'1875

0'59375

Il lit ce dernier résultat 59 375 cent millièmes.

Origine des nombres décimaux

Il faut attendre deux siècles pour avoir un exposé général et théorique des fractions décimales avec Al Samaw'al (en 1172-1173) qui les manipule avec aisance dans les problèmes de division et extraction de racines.

Au 15ème siècle, Al Kashi écrit un traité complet des opérations arithmétiques avec les nombres décimaux. Il insiste sur l'analogie entre les systèmes sexagésimal et décimal.

Origine des nombres décimaux

Il faudra attendre le 16e siècle pour que Simon Stévin introduise les nombres décimaux en Europe, dans son livre « Disme ».

Il utilise la notation 6°8145 pour 6,8145.

Le point de vue du mathématicien

Un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut être écrit sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de dix.

7/20 est un nombre décimal, car

$$\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$$

1/6 n'est pas un nombre décimal

La « décimalité »

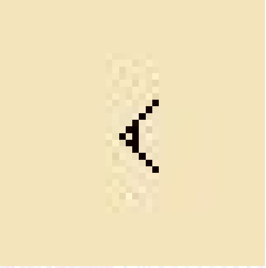
La décimalité d'un nombre dépend du système de numération choisi (décimal pour nos nombres décimaux).

Dans le système babylonien, la « décimalité » ou plutôt la « sexagésimalité » donne un ensemble de nombres plus grand que celui de nos décimaux.

Par exemple 1/6 est un nombre « sexagésimal » :

il serait représenté par 0,10 dans

notre système d'écriture à virgule



Et l’écriture à virgule, alors ?

Une écriture plus simple

La considération des nombres décimaux ne se justifie que parce qu'ils peuvent s'écrire simplement dans notre système décimal de position.

$$\frac{27}{20} = \frac{135}{100} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$$

D'où l'écriture 1,35

Une comparaison des nombres plus simples

Cette écriture simplifie la comparaison des nombres décimaux

$$\frac{27}{20} \; ? \; \frac{34}{25}$$

$$1{,}35 \quad ? \quad 1{,}36$$

Des algorithmes de calcul plus simples

Autre avantage, les algorithmes qui permettent d'effectuer les 4 opérations sur les nombres entiers fonctionnent également avec les nombres décimaux.

Une écriture efficace des quotients « décimaux »

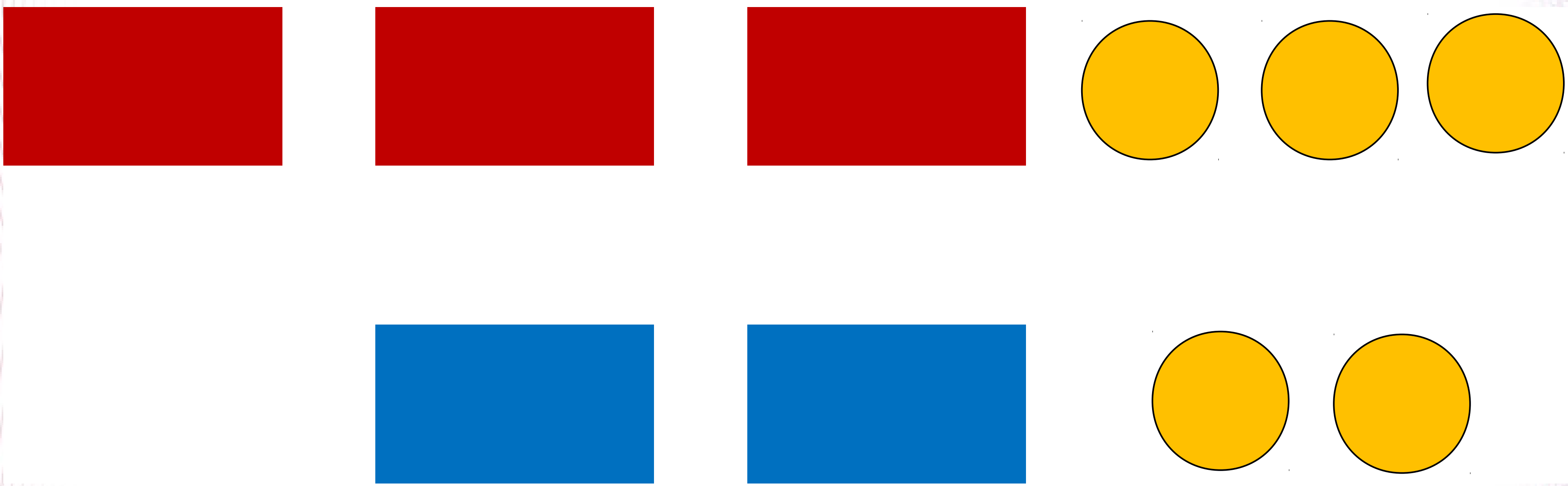
Enfin si le rationnel a/b est un nombre décimal l'algorithme de la division donne son écriture décimale.

Exemple : 18/4 = 4,5

Un autre problème de Tartaglia

Deux soldats romains possèdent respectivement deux pains et trois pains. Pour leur déjeuner, ils décident de les partager entre eux. Arrive un troisième soldat. Bien qu'il n'ait pas de pain, les deux soldats partagent avec lui les cinq pains. Avant de partir, pour les remercier de leur générosité, le dernier participant donne aux deux autres cinq pièces d'or. Comment doivent-ils se les partager pour que ce partage soit équitable ?

Le bon sens….



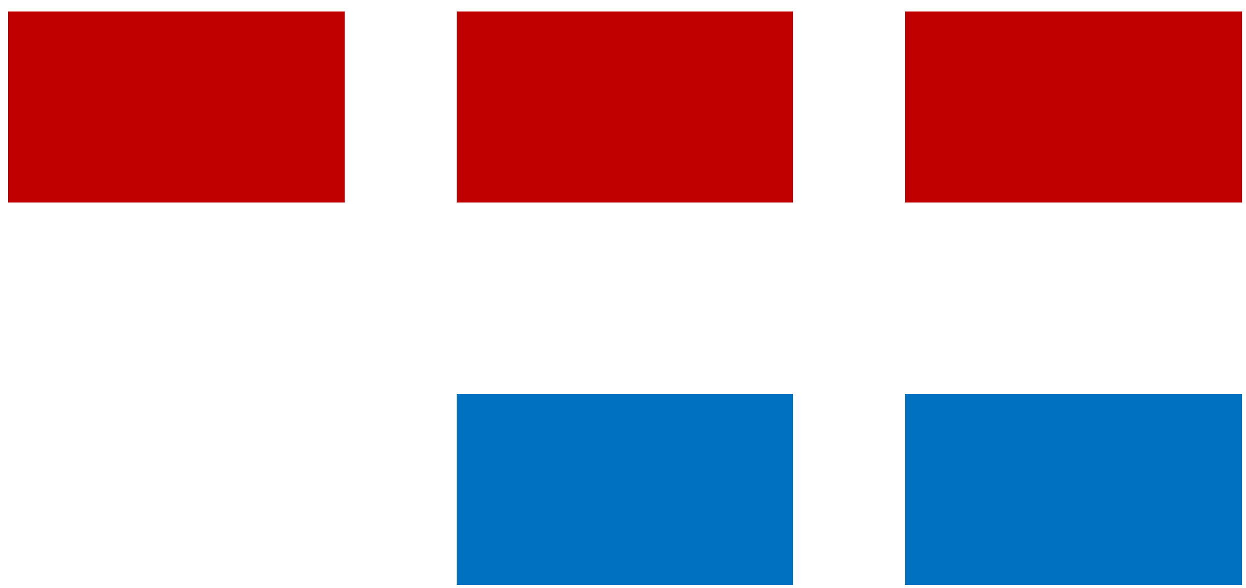
Qui dit partage…dit fraction

$$5 = \frac{15}{3} \qquad \frac{15}{3} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3}$$

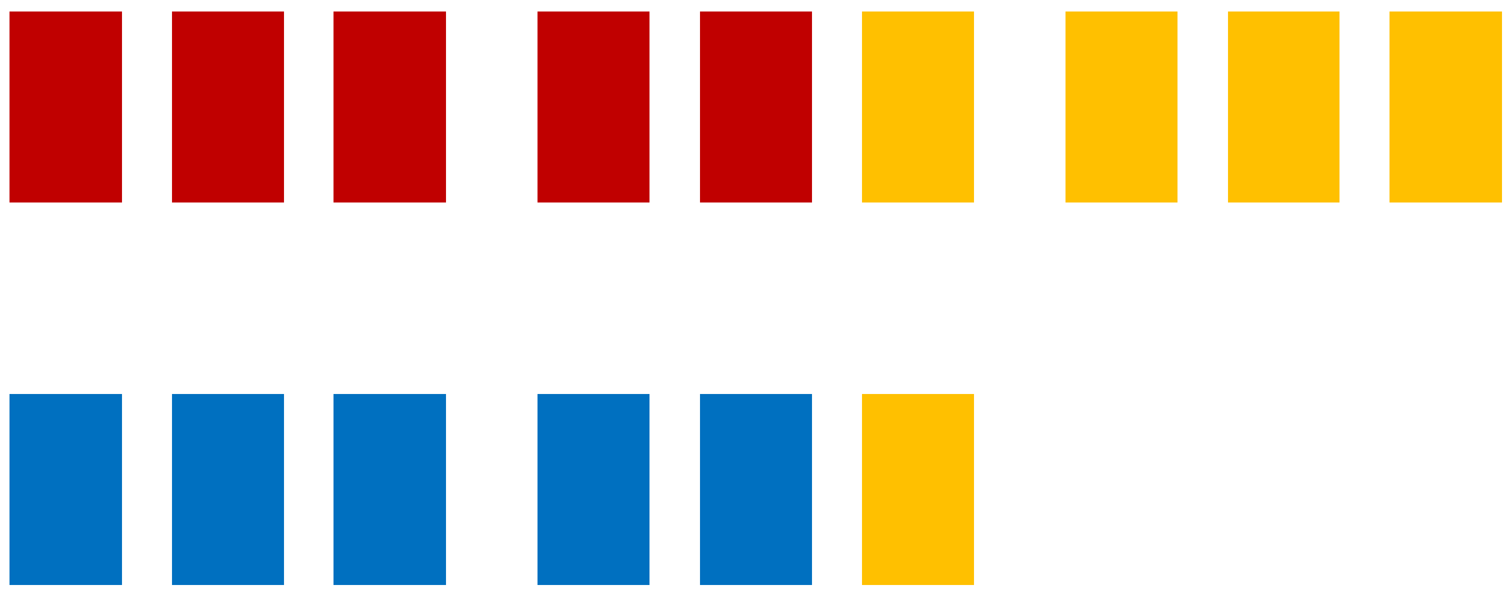
$$3 = \frac{9}{3} \qquad \frac{9}{3} - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2 = \frac{6}{3} \qquad \frac{6}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

Partageons donc nos pains en 3



Et si on passait aux tiers de pain



Omar Al-Khayam

Ceux qui par la science vont au plus haut du monde

Qui, par leur intelligence, scrutent le fond des cieux

Ceux-là, pareils aussi à la coupe du ciel

La tête renversée, vivent dans leur vertige

Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques

« Je souhaite que nous ayons en vue un objectif inaccessible : que chaque enfant, que chaque adulte, ait éprouvé au cours de sa vie la joie de la contemplation et de la découverte mathématique »

Jean-Pierre Kahane

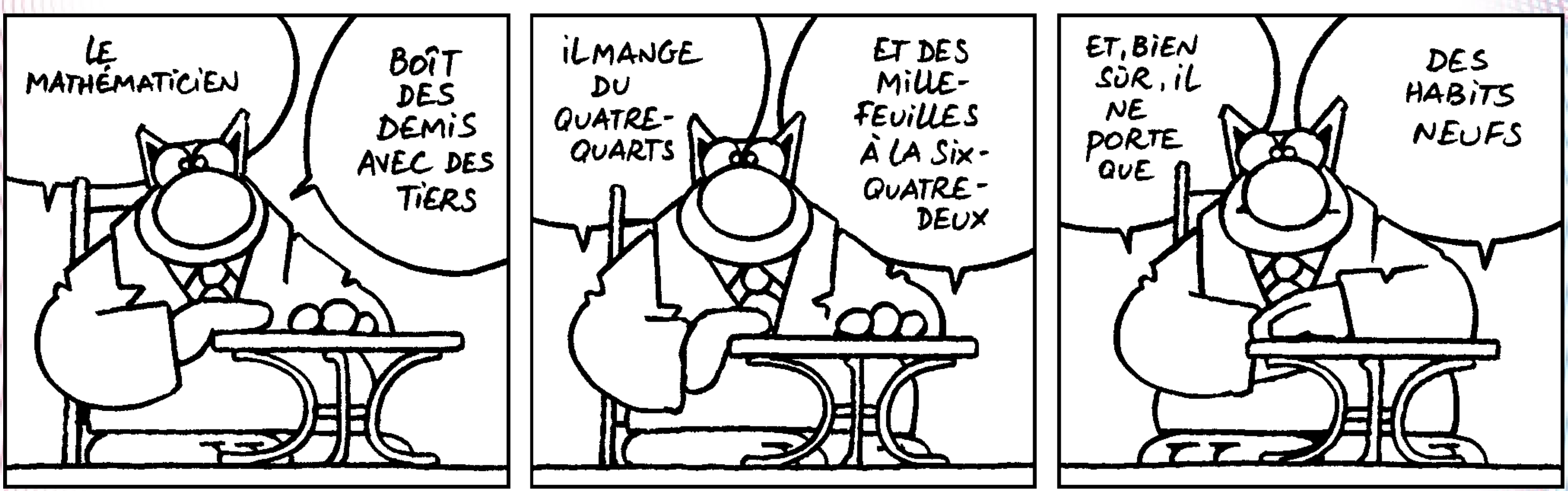
Omar Al-Khayam

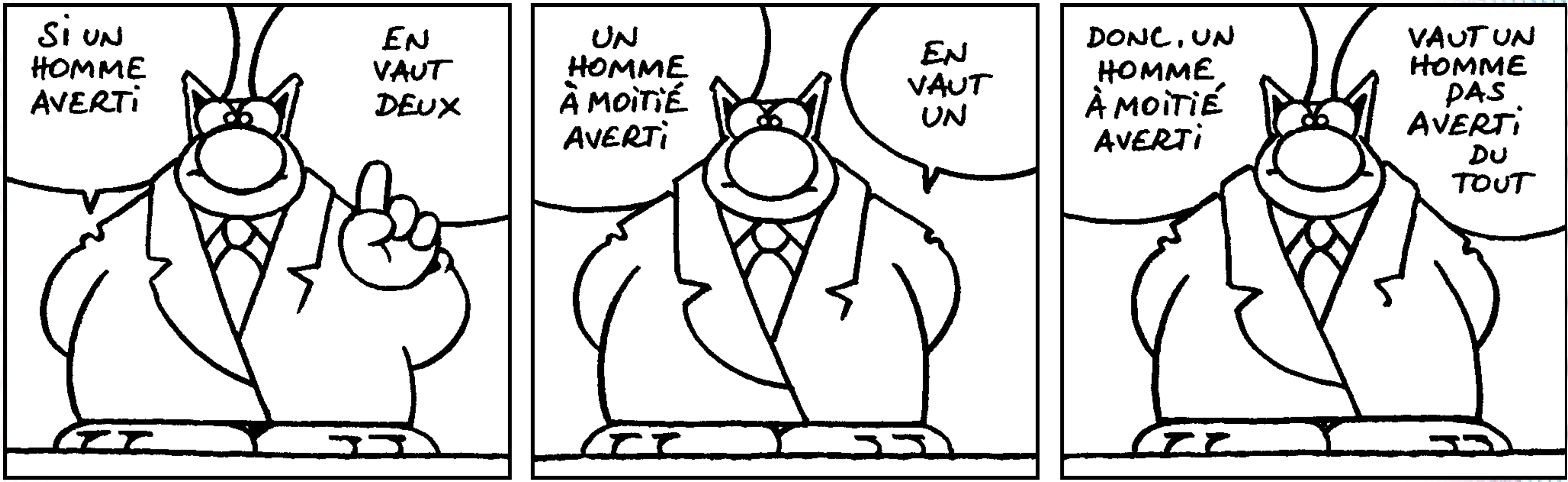
Je ne me suis jamais privé de donner mon temps aux sciences

Par la science, j'ai dénoué les quelques nœuds d'obscur secret

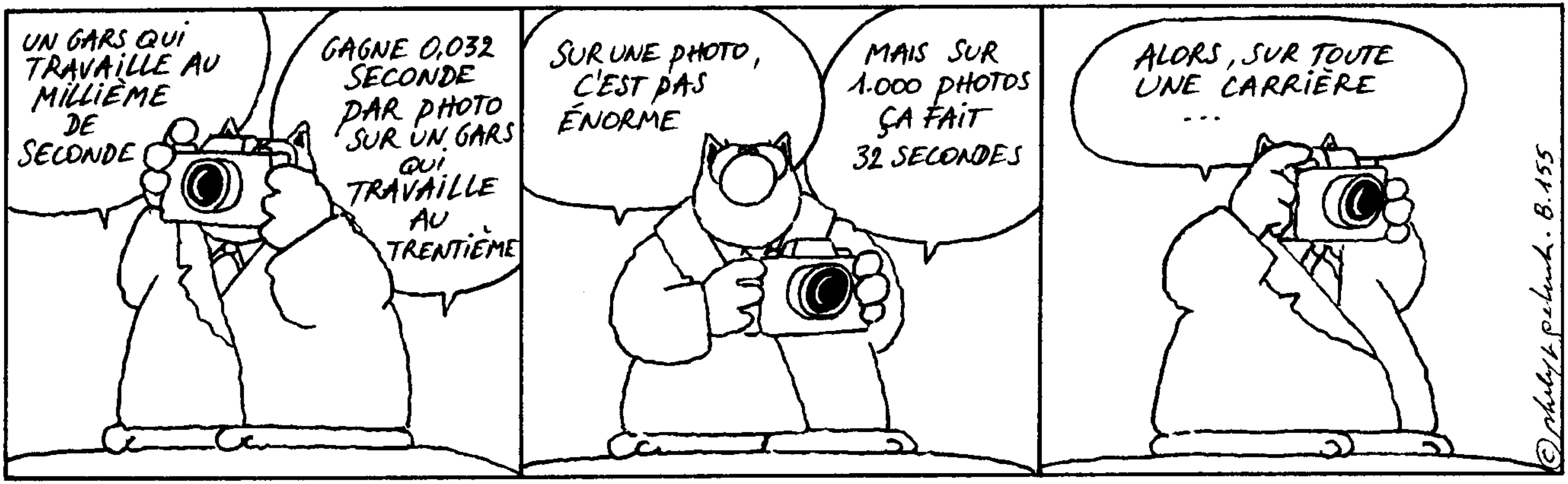
Après soixante-douze années de réflexion sans jour de trêve

Mon ignorance, je la sais…


LE MATHÉMATICIEN
BOÎT DES DEMIS AVEC DES TIERS
IL MANGE DU QUATRE-QUARTS
ET DES MILLE-FEUILLES À LA SIX-QUATRE-DEUX
ET, BIEN SÛR, IL NE PORTE QUE
DES HABITS NEUFS

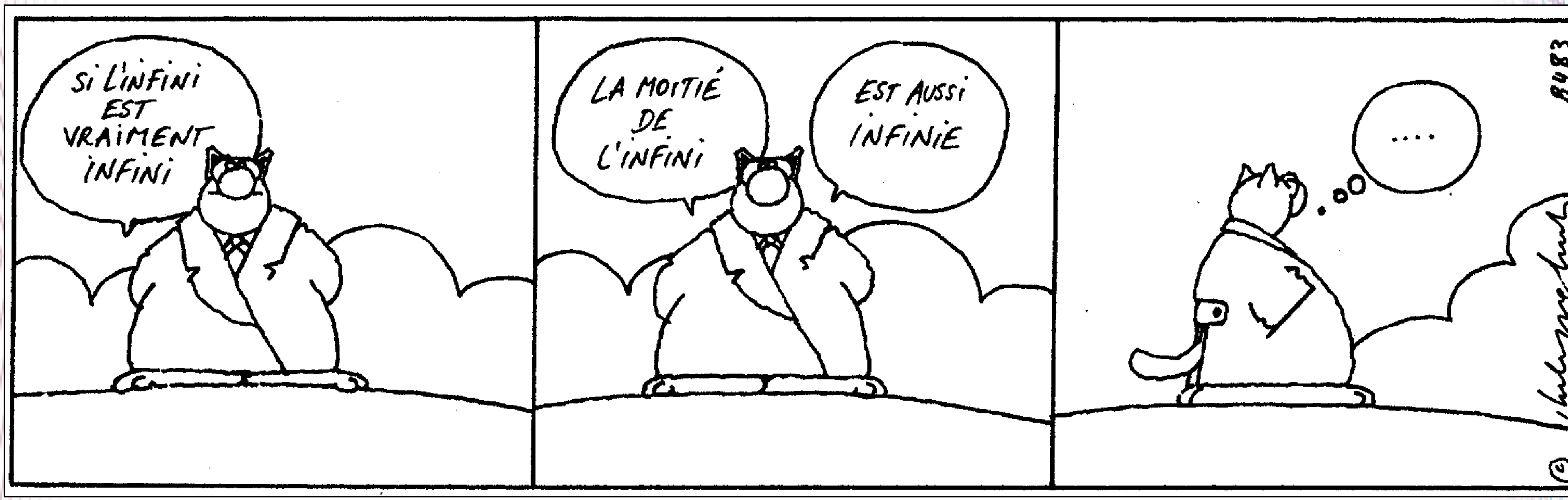


Francisco Ferrer



Francisco Ferrer

Francisco Ferrer


SI L'INFINI EST VRAIMENT INFINI
LA MOITIÉ DE L'INFINI
EST AUSSI INFINIE
....
8483
©

Quatrième balade : autour du pourcentage

Les nombres dans la société et dans l’information
Les mathématiques du citoyen

LOURDES RÉUSSITES

Sous le titre « Un bon cru au bac », « La République des Pyrénées » (13/7) s'extasie devant les résultats de la bonne ville de Lourdes : « 96 % de mentions très bien, bien et assez bien. Du jamais-vu. » Mazette ! La cité mariale serait-elle un paradis pour les surdoués ? En réalité, pour obtenir ces mirobolants 96 %, le confrère a eu recours à un calcul simple. Il a ajouté le pourcentage du lycée public de Sarsan (« toutes mentions confondues, 50 % ») à celui du lycée privé Peyramale (« 46 % de mentions »). En additionnant ces deux nombres, il faudrait donc compter « 96 % de mentions » à Lourdes. Et ce n'est pas fini. Car un troisième lycée de la ville n'ayant pu être comptabilisé, la part de mentions au bac devrait, selon cette nouvelle arithmétique, dépasser largement les 100 %.

Lourdes, ville de tous les miracles !

Deux grands modèles

Deux grands modèles vont se construire entre l'école et le collège, avec leurs modes de traitement spécifiques au niveau du calcul :

Le modèle « additif » : comparaison « absolue »

C'est le « royaume de l'écart (différence) »

Le modèle « proportionnel » : comparaison « relative »

C'est le « royaume du rapport (quotient)»

Le modèle « proportionnel »

Registre numérique : suites proportionnelles, tableaux, « règle de trois »…

Registre algébrique : « y = kx », propriétés de linéarité…

Registre fonctionnel : application linéaire, traduction graphique…

Registre géométrique : théorème de Thalès, lien entre parallélisme et proportionnalité…

Doublants et doublements

Albert Camus : 15 redoublants en 3ème

Paul Langevin : 12 redoublants en 3ème

Albert Camus : 125 élèves en 3ème

Paul Langevin : 80 élèves en 3ème

Taux de doublement à A.Camus : 12%

Taux de doublement à P.Langevin : 15%

Plus de garçons ou de filles ?

Pierre Brossolette : 45% de garçons, 55% de filles

Gaston Bachelard : 60% de garçons, 40% de filles

A Brossolette : 420 élèves ; à Bachelard : 360 élèves

405 garçons et 375 filles

A Brossolette : 520 élèves ; à Bachelard : 260 élèves

390 garçons et 390 filles

A Brossolette : 740 élèves ; à Bachelard : 300 élèves

513 garçons et 527 filles

Le médicament B est meilleur que le médicament A

	A	B
femmes	23/200	85/500
hommes	400/500	90/100

femmes	11,5%	17%
hommes	80%	90%

Quoique !

	A	B
femmes	23/200	85/500
hommes	400/500	90/100
humains	423/700	175/600
En %	60,5%	29,2%

Nombres (chiffres) et calculs dans la société : les statistiques

« Il existe trois sortes de mensonges : les mensonges, les affreux mensonges, et les statistiques » (Benjamin DISRAELLI)

« Les statistiques, c'est comme le bikini, ça montre tout, mais ça cache l'essentiel » (Louis ARMAND)

« Les statistiques sont formelles : il y a de plus en plus d'étrangers dans le monde » (Pierre DESPROGES)

Mathématiques et société

Pourquoi enseigner les mathématiques !

Une autre réponse, souvent cataloguée " mathématiques du citoyen ", est la formation à l'analyse et au traitement de l'information. Les mathématiques vont développer des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations en s'appuyant sur de fréquents changements de registre : texte, tableau, graphique, résultat numérique…

Pourquoi enseigner les mathématiques !

On trouve ici le rôle social des mathématiques : la lecture, l'interprétation, l'utilisation de diagrammes, tableaux, graphiques, leur analyse critique aident l'élève à mieux comprendre les informations qu'il reçoit, et en cela contribuent à son éducation civique.

Mathématiques et Société

Le Conseil de l'Education des Etats Unis a fait paraître en 2001 un livre " Mathematics and democracy ". L'idée générale de la recherche qui a conduit à cette publication est que la méconnaissance complète des mathématiques, et en particulier du traitement de l'information, que les Américains appellent " innumeracy " rend les citoyens infirmes au même titre que l'analphabétisme, l'illiteracy.

Mathématiques et Société

Inversement, un apprentissage du calcul, de la géométrie, de la statistique et des probabilités constitue un bon atout pour se situer dans le présent et saisir les enjeux de l'avenir.

Mathématiques et Société

Donner des outils, initier au débat scientifique, développer des comportements experts, apprendre à maîtriser l’information, voilà des valeurs profondes qui devraient être celles d’un enseignement de mathématiques pour tous. Mais elles se heurtent à des valeurs de la société actuelle.

Mathématiques et Société

Beaucoup d'élèves sont des " consommateurs " et se situent dans un rapport presque exclusif à la réussite. Le savoir pour beaucoup d'entre eux n'est pas une valeur, mais une marchandise qui a un double prix : l'utilité et la réussite (à quoi çà sert ? est-ce qu'il y en aura au prochain contrôle ?)

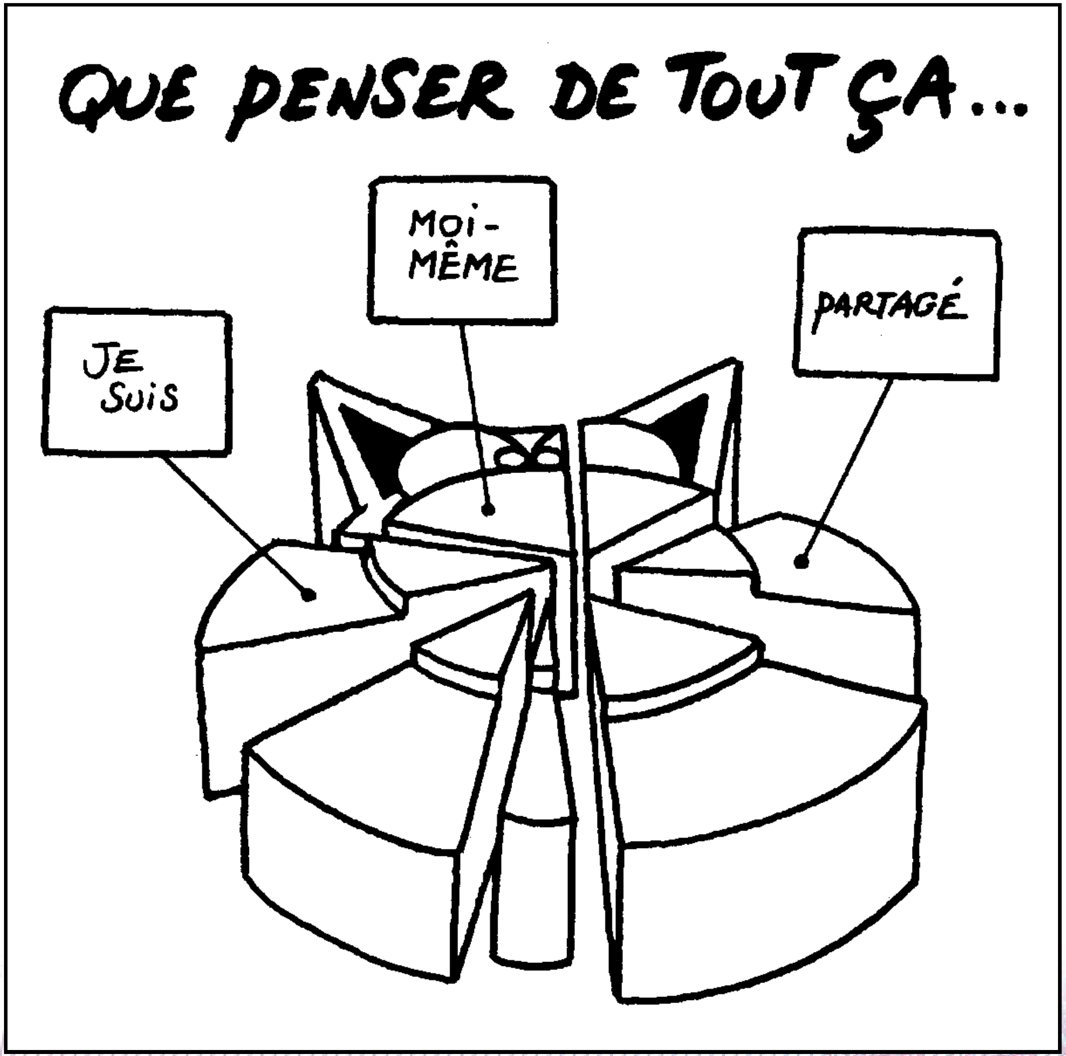
Mathématiques et Société

Une des caractéristiques de l’activité mathématique telle que je la décris ci-dessus est qu’elle se situe dans la durée. On trouve ici un profond hiatus entre des valeurs dominantes de la société, basées sur le “ rapide ” et le “ volatile ”, et celles des mathématiques basées sur le “ lent ” et le “ durable ”.

Mathématiques et Société

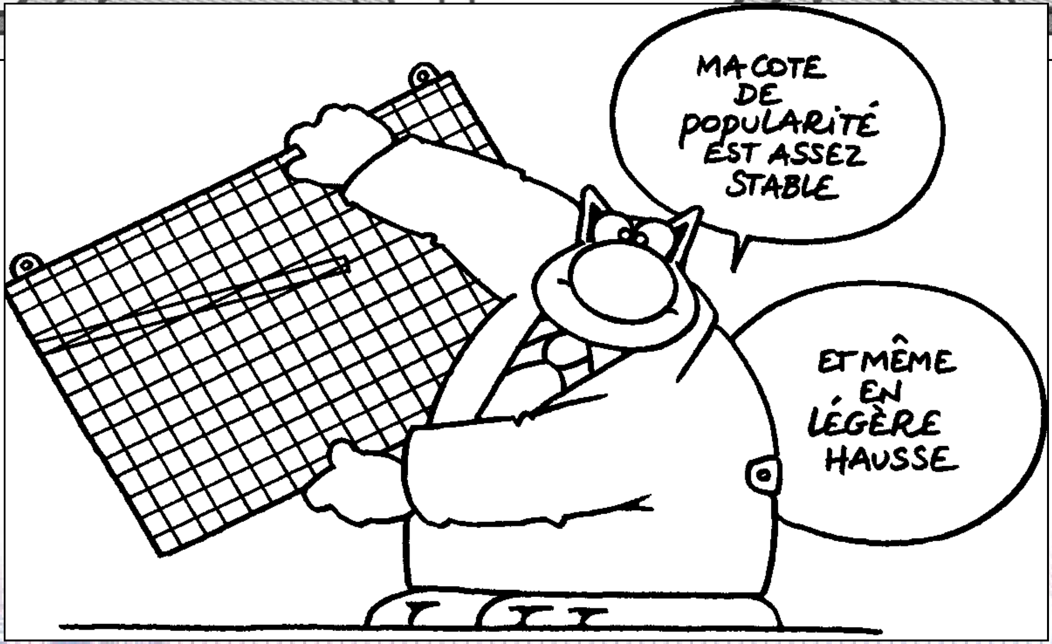
Un souhait (peut-être n'est-ce qu'un rêve ?) est que l'enseignement des mathématiques puisse offrir un modèle de construction du savoir dans le temps et une habitude de mobilisation intellectuelle la plus complète dans la recherche de problèmes face à une société où l'instant prime la durée et où l'effort doit immédiatement être rentabilisé.

Statistique : diagrammes « camenberts »



Francisco Ferrer

Statistique : Séries chronologiques



Francisco Ferrer

Universalité du graphique

Une définition didactique de la médiane

Un peu plus de rigueur S.V.P.

Francisco Ferrer

Mathématiques

et Enseignant

Mathématiques et Enseignant

Je sais qu'un certain nombre de professeurs souffrent dans leur métier d'enseignant, en particulier par la difficulté à mobiliser les élèves, les intéresser, les rendre attentifs, les impliquer dans une activité, les stimuler pour mémoriser un certain nombre de résultats essentiels…Et je comprends que leur réaction à mes propos puisse être : c'est bien beau tout ça, mais un peu idyllique, et en tout cas bien loin de la réalité.

Mathématiques et Enseignant

J’ai longtemps été enseignant dans un collège de ZUP, classé ZEP, et les classes que j’avais comprenaient des élèves d’origine et de culture multiples.

Un certain nombre d’entre eux étaient d’origine maghrébine, et lorsque, à propos de la résolution d’équations, je leur parlais d’Al Khwarizmi, et de manière plus générale de l’apport du monde arabe à la construction des mathématiques que nous utilisons aujourd’hui, je voyais ces élèves se passionner, “ re ”devenir “ fiers ” de leur passé et de leur culture.

Mathématiques et Enseignant

De même, j’ai toujours vu mes classes se passionner pour des activités de type Rallye ”, développer cette communauté scientifique dont je parlais plus haut pour résoudre le maximum de problèmes, se mettre d’accord par le débat sur des solutions (parfois fausses !).

Ce type d’activité est souvent dénommé “ faire des mathématiques autrement ”, alors que c’est l’essence même de la démarche mathématique.

Mathématiques et Enseignant

Le problème est de l'intégrer de façon régulière avec un triple point de vue :

didactique (démarche heuristique, construction de connaissances, institutionnalisation de certaines d'entre elles),

pédagogique (formes de travail et d'interaction développées dans la classe)

institutionnel (adéquation avec les programmes aussi bien en terme de contenu que d'horaire disponible).

Mathématiques et Enseignant

En tant que formateur à l'IUFM, la référence aux idées que j'ai développées plus haut m'a souvent guidé pour comprendre les professeurs stagiaires, les difficultés qu'ils pouvaient rencontrer dans cet enseignement des mathématiques, et ainsi trouver des pistes de formation auxquelles ils adhèrent et qui leur permettent de se construire (voire de se reconstruire) leur relation aux mathématiques et à leur enseignement.

Mathématiques et Enseignant

Ceci est particulièrement sensible avec les futurs professeurs des écoles : un certain nombre font partie de ces “ rejetés des mathématiques ” que construit notre enseignement ; leur regard sur les mathématiques, et surtout sur eux par rapport aux mathématiques est particulièrement négatif. Et pourtant, ils vont avoir à les enseigner, et de façon importante au regard des contenus et des horaires de l’école primaire.

Mathématiques et Enseignant

Quelle première nécessité de formation, sinon de leur redonner un regard plus positif sur cette discipline : en effet, tout élève est aussi sensible au rapport qu'a l'enseignant avec l'objet d'apprentissage qu'à cet objet lui-même. Et ce changement de regard passe souvent par une reconquête du sens.

Mathématiques et Enseignant

Et là, une approche épistémologique et historique de la construction des nombres et des opérations, une réflexion sur formes et grandeurs, un éclairage sur la place des mathématiques dans l'aide à la gestion du quotidien et à la formation de l'individu, l'interaction des mathématiques avec les autres disciplines (dimension particulièrement importante dans le cadre de la polyvalence des professeurs des écoles) sont autant de vecteurs qui permettront d'amener le futur stagiaire à construire un enseignement porteur de sens.

« Là où le maître échoue, que peut faire l'élève ? » Wagner

Reprenant cette idée, la meilleure formation que l'on puisse donner ne serait-elle pas celle qui conduirait tout enseignant à se poser la question : les mathématiques ne sont elles pas un des rares lieux de l'enseignement où l'élève peut parfois dépasser le maître ?

Encore faut-il que celui-ci l'y ait autorisé !

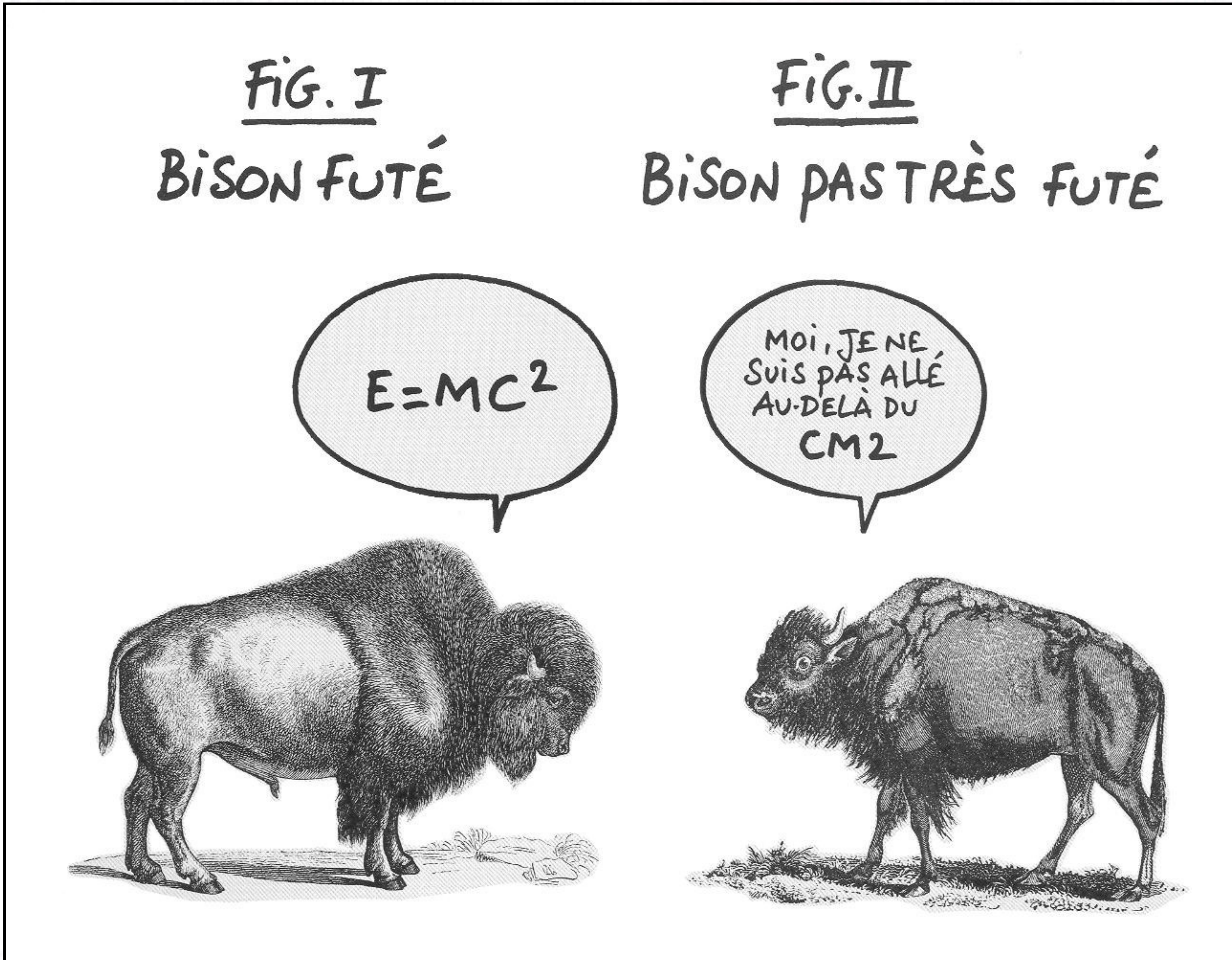


FIG. I
BISON FUTÉ
FIG. II
BISON PAS TRÈS FUTÉ
E=MC²
MOI, JE NE SUIS PAS ALLÉ AU-DELÀ DU CM2

Conclusion

«Les mathématiques sont une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens »

Joseph Fourier